

STARK π -REGULÄRE RINGE

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Friedrich Dischinger
aus Passau

eingereicht am : 21. Januar 1977

STARK π -REGULÄRE RINGE

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Friedrich Dischinger
aus Passau

eingereicht am : 21. Januar 1977



1. Berichterstatter: Professor Dr. F. Kasch
 2. Berichterstatter: Professor Dr. B. Pareigis
- Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 1977

Inhaltsverzeichnis

Einleitung p. I - XII

§1) $\mathcal{T}$ -Regularitätseigenschaften von Ringelementen 1

§2) Das "Liften" von $\mathcal{T}$ -Regularitätseigenschaften 11

§3) Stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe 23

§4) Stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe und ihre Einheitengruppen 40

§5) Vollständig $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe 47

Einleitung

Der Ort, den die vorliegende Arbeit im Gebäude der Mathematik einnimmt, wird durch ihren Titel deutlich im Gebiet der Ringtheorie lokalisiert. Sicherlich darf aber von dieser Einleitung eine engere Umgrenzung des Arbeitsgebietes erwartet werden; doch soll versucht werden, diese, um eine gewisse Willkürlichkeit in der Wahl der Bezugspunkte zu umgehen, durch eine knappe Skizzierung relevanter historischer Entwicklungslinien zu ersetzen.

Zunächst ist hier die Theorie der algebraischen Algebren zu nennen, die im Zuge der im ersten Drittel dieses Jahrhunderts forciert betriebenen Untersuchungen über die Struktur von Algebren (über Körpern) fast notwendig entstanden ist. Die einfachsten und fruchtbarsten Anwendungsbeispiele sind hierfür bekanntlich die algebraischen Körpererweiterungen und die Endomorphismenringe endlichdimensionaler Vektorräume. Ohne Beziehung hierauf und wohl vornehmlich in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über Ringe von Operatoren im Hilbertraum schuf J. von Neumann 25 den Begriff des regulären Ringes. Als Versuch, diesem außerordentlich erfolgreichen Konzept durch Verallgemeinerung einen größeren Anwendungsbereich zu erschließen, wurde bereits kurze Zeit später von McCoy der Begriff des π -regulären Ringes geprägt. Allerdings zeigte dieses Konzept - in scharfem

Gegensatz zu seinem Vorbild - von Anfang an eine gewisse Schwäche beim Übergang von der kommutativen zur nichtkommutativen Ringtheorie. Trotzdem wurde bald ein gewisser Zusammenhang zwischen dem Begriff der $\mathcal{T}$ -Regularität und dem der algebraischen Algebra sichtbar. Gesah dies wohl zum ersten Mal in einer in anderem Zusammenhang grundlegenden Arbeit von Arens und Kaplansky [1], so wurde diese Beziehung noch weit klarer in der von Kaplansky allein durchgeführten Fortsetzung erkennbar. In beiden Arbeiten erschien - wenn auch noch ohne terminologische Fixierung - eine Modifikation der die $\mathcal{T}$ -Regularität definierenden Forderung, bei welcher die auf den regulären Fall zurückgehende und von McCoy noch gewährte Symmetrie dieser Relation aufgegeben wurde. Natürlich entsteht hierdurch ein Problem der Seitenabhängigkeit. Bringt Kaplansky auch dieses Problem nicht explizit zur Sprache, so stellt er doch ganz allgemein die Frage, welche Aussagen über diese neue Ringklasse gemacht werden könnten. Offenbar als Antwort hierauf erscheint einige Zeit später eine Arbeit von Azumaya [3], in der auch die Bezeichnung "rechts $\mathcal{T}$ -regulär" eingeführt wird. Ein Ring(element), der (bzw. das) zugleich rechts und links $\mathcal{T}$ -regulär ist, heißt nach Azumaya "stark $\mathcal{T}$ -regulär". Die somit bereits in der Terminologie stärker zur Geltung gelangende Problematik der Seitenabhängigkeit wurde hierbei von Azumaya unter einschränkenden Voraussetzungen, die auch die Übereinstimmung von starker

$\mathbb{T}$ -Regularität und $\mathbb{T}$ -Regularität, also zweier i. a. verschiedener Begriffe, erzwangen, gelöst. Dieses Resultat umfaßte auch die in der oben zitierten Arbeit von Arens und Kaplansky niedergelegte Erkenntnis, daß der Begriff des stark regulären Ringes nicht seitenabhängig ist. Dieser Begriff war bereits früher auf solche Weise aus dem des regulären Ringes entwickelt worden ([15]), daß er nun als Spezialfall des rechts $\mathbb{T}$ -regulären Ringes erscheinen konnte. Während aber dieser speziellere Begriff eine weitere in der Ringtheorie wesentliche Stabilitätseigenschaft, die Invarianz bei der Bildung von Matrixringen, trivialerweise nicht erfüllte, blieb die entsprechende Frage für den Fall eines rechts oder stark $\mathbb{T}$ -regulären Ringes offen - und zwar bis heute. Allerdings konnte unter den von Azumaya eingeführten Bedingungen auch diese Frage bereits kurze Zeit später von Tominaga [34] im positiven Sinne gelöst werden. Die auf das Jahr 1954 folgende Entwicklung brachte dann zwar eine Reihe interessanter Einzelergebnisse - hier sind die Arbeiten von Drazin [11], Fuchs und Rangaswamy [16], Fisher und Snider [13] sowie die Veröffentlichungsserie von Niţă (siehe [27], er benutzt zunächst eine andere Terminologie) zu nennen -, doch konnten wesentliche Durchbrüche nicht mehr erzielt werden. Dagegen wurde nun ein neuer Aspekt der Theorie deutlich: ihre Beziehungen zur Theorie der Ringe mit Kettenbedingungen. Die triviale Erkenntnis, daß genau diejenigen Ringe rechts

$\mathcal{T}$ -regulär sind, die die "absteigende" Kettenbedingung für gewisse Ketten zyklischer Rechtsideale erfüllen, gewann vor allem im Lichte der von Bass $\boxed{4}$ stammenden Charakterisierung der perfekten Ringe als der Ringe mit "absteigender" Kettenbedingung für (im linksperfekten Fall) alle zyklischen Rechtsideale an Bedeutung, da nun die Rechts- $\mathcal{T}$ -Regularität als Verallgemeinerung dieses außerordentlich wichtigen und erfolgreichen Konzepts der (nichtkommutativen) Ringtheorie betrachtet werden konnte.

Die vorliegende Arbeit stellt nun u. a. einen Versuch dar, das Thema "stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe" in einer systematischen Darstellung von neuem aufzurollen. Hierbei wird nicht nur aus Gründen größerer Allgemeinheit, sondern auch in Anerkennung ihrer grundsätzlichen Bedeutung eine eingehende Erörterung stark $\mathcal{T}$ -regulärer Ringelemente an den Anfang gestellt. Ist hier einerseits der Zusammenhang mit Einheiten, Idempotenten, nilpotenten und algebraischen Elementen hervorzuheben, so gilt es andererseits, stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringelemente von rechts $\mathcal{T}$ -regulären oder $\mathcal{T}$ -regulären abzugrenzen. Als Grundlage für die gesamte weitere Arbeit werden in Satz 1.2 die wichtigsten Aussagen über stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringelemente zusammengefaßt. Diese sind zwar (im Wesentlichen) bekannt, doch dürften beim Beweis gewisse Vorteile der hier gewählten Betrachtungsweise bereits deutlich werden. Diese führt beispielsweise zu der in Satz 1.9

gegebenen sehr einfachen, aber offenbar bisher nicht bekannten allgemeinen Charakterisierung stark π -regulärer Ringelemente.

Der zweite Abschnitt geht von der in der Ringtheorie häufig benutzten Tatsache aus, daß Idempotente über Nilideale geliftet werden können. Da sowohl "idempotent" als auch "nilpotent" durch "stark π -regulär" verallgemeinert werden, drängt sich hier der Gedanke an mögliche Verallgemeinerungen dieses wichtigen Hilfsmittels auf. In der Tat kann gezeigt werden, daß sich Idempotente über stark π -reguläre Ideale (Satz 2.3) und stark π -reguläre Elemente über Nilideale (Satz 2.8) liften lassen. Dagegen wird eine allgemeine Möglichkeit, stark π -reguläre Elemente über stark π -reguläre Ideale liften zu können, durch ein Gegenbeispiel ausgeschlossen. Ferner wird ein Beispiel eines Ringes A , eines Ideals I und eines Elementes a von A angegeben, die folgende Eigenschaften besitzen: $I^2 = 0$, a ist 2-regulär modulo I , aber in $a + I$ ist kein π -reguläres Element von A enthalten, d. h. $a + I$ läßt sich nicht zu einem π -regulären Element von A liften. Eine sinnvolle Variation dieser Fragestellungen ergibt sich nun, wenn man im Liftungsproblem die betrachtete Eigenschaft (nil, regulär, stark π -regulär...) einerseits für ein Ideal des Faktorrings voraussetzt, andererseits aber fordert, daß jedes kanonisch in dieses Ideal abgebildete Element die entsprechende Eigenschaft besitzt. Diese Fragen entsprechen den Erwei-

terungsproblemen in der nichtunitären Ringtheorie und spielen in der Radikalthorie der Ringe eine wesentliche Rolle. Im vorliegenden Zusammenhang muß aber festgestellt werden, daß kein stark $\mathcal{T}$ -reguläres Analogon zu den Begriffen des (oberen) Nilradikals, des regulären $\boxed{8}$ und des stark regulären $\boxed{20}$ Radikals existiert. Das hierzu konstruierte Gegenbeispiel besteht in einem regulären, aber nicht stark $\mathcal{T}$ -regulären Ring, der ein stark $\mathcal{T}$ -reguläres Ideal I besitzt, so daß R/I Körper ist.

Der dritte Abschnitt wird von einem zentralen Resultat der Arbeit eröffnet: es wird gezeigt, daß rechts $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe links $\mathcal{T}$ -regulär sind. Dieser Satz, der die beiden in ihm verwendeten Bezeichnungen überflüssig macht, da sie nun durch stark $\mathcal{T}$ -regulär ersetzt werden können, wurde zunächst von mir auf relativ komplizierte Weise bewiesen (Zurückführung auf den Fall primitiver Ringe, Verwendung des Dichtesatzes und Benutzung des Zorn'schen Lemmas). Der hier vorgeführte, sehr kurze und elementare Beweis wurde von Herrn Dr. H. Zöschinger gefunden. Die Bedeutung dieses Satzes rührt vor allem aus der Tatsache her, daß der "op-Funktor" die einzige nichttriviale Automorphismenklasse der Kategorie der Ringe konstituiert (siehe $\boxed{10}$). Da in seiner Formulierung nur die Ringmultiplikation vorkommt, liegt wohl zunächst die Frage nach der Ausdehnbarkeit des Resultats auf Halbgruppen nahe; sie wird aber durch ein Gegenbeispiel ver-

worfen. Als positives Ergebnis kann gezeigt werden, daß jeder Ringhomomorphismus f mit stark $\mathcal{T}$ -regulärem Ziel in ein Produkt $f = g \circ h$ zerlegt werden kann, wobei h ein Ringepimorphismus mit stark $\mathcal{T}$ -regulärem Ziel, g ein Ringmonomorphismus ist. Daß hingegen von der Theorie der kommutativen (stark) $\mathcal{T}$ -regulären Ringe im nichtkommutativen Fall wenig erhalten bleibt, wird durch ein Beispiel eines (rechts und links) primitiven stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringes gezeigt, der weder einfach noch regulär ist. Dagegen kann der Satz von Vasconcelos [35] (siehe auch [32]), der besagt, daß ein kommutativer Ring R genau dann (stark) $\mathcal{T}$ -regulär ist, wenn jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Moduls surjektiv ist, in folgender Form verallgemeinert werden: Ein Ring R ist genau dann stark $\mathcal{T}$ -regulär, wenn jeder injektive Endomorphismus eines zyklischen R -Rechtsmoduls surjektiv ist. Nachdem einige weitere Ergebnisse zur Theorie der stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringe gewonnen sind, werden die Ausführungen dieses dritten Abschnitts durch eine ein gewisses selbständiges Interesse beanspruchende Erörterung bestimmter Abschwächungen des Begriffes "rechts perfekter Ring" abgerundet. Ziel ist hierbei das Studium der Wirkung von Endlichkeitsbedingungen auf stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe sowie auch allgemeiner auf Zornringe und als Ausgangspunkt dient die Überlegung, daß die durch eine Endlichkeitsbedingung definierbare Klasse der (rechts) perfekten Ringe eine besonders interessante Teilklasse der

Klasse der stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringe darstellt. Ein Vergleich der so gewonnenen neuen Ringklassen mit einem aus der starken $\mathcal{T}$ -Regularität selbst auf analoge Weise entstehenden Begriff führt dann wieder zum Ausgangspunkt zurück.

Der vierte Abschnitt ist von einer Reihe neuerer Arbeiten inspiriert (vgl. [12], [23]), die sich mit der Bedeutung der Einheitengruppe eines Ringes für die Struktur des Ringes selbst befassen. Um hier zu vernünftigen Aussagen zu gelangen, bedarf es natürlich, wie man etwa am Beispiel freier Ringe erkennt, gewisser Einschränkungen hinsichtlich der zugrundegelegten Ringklasse. Bisher wurden deshalb in der einschlägigen Literatur vornehmlich artinsche und perfekte Ringe sowie ausnahmsweise algebraische Algebren betrachtet, so daß der Gedanke an eine erweiternde Zusammenfassung aller geeigneten Resultate in Hinblick auf die Klasse der stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringe naheliegt. Dieses Ziel wird hier auf rein ringtheoretischem Weg erreicht, ohne also, wie in [23], Liealgebrenmethoden heranziehen zu müssen. Fundament ist die Beobachtung (Satz 4.1), daß die Einheitengruppe eines Faktorrings eines stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringes R epimorphes Bild der Einheitengruppe von R ist. Benötigt wird ferner eine Aufstellung der Fälle (n, K) , in denen die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ auflösbar ist. Diese läßt sich beispielsweise der "Geometric Algebra" [2]

von E. Artin (zusammen mit einem Resultat von Hua - siehe $\boxed{12}$) entnehmen. Hierbei hat sich allerdings in die einschlägige Literatur ($\boxed{12}$) ein Fehler eingeschlichen, der zu falschen Behauptungen geführt hat, bisher aber nicht bemerkt worden zu sein scheint (vgl. $\boxed{23}$). Mit diesen Vorbereitungen kann schließlich eine Reihe von Strukturaussagen über stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe mit auflösbarer, nilpotenter oder abelscher Einheitengruppe bewiesen werden.

Nachdem im dritten Abschnitt die Seitenunabhängigkeit des Begriffs "rechts $\mathcal{T}$ -regulärer Ring" dargelegt und somit ein Argument für die Bedeutung dieser nun mit der Klasse der stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringe zusammenfallenden Ringklasse gewonnen wurde, beschäftigt sich der abschließende fünfte Abschnitt mit der jetzt unumgänglichen Frage, ob die Klasse dieser Ringe auch gegen die Operation der Matrixbildung abgeschlossen ist. Über die fundamentale Bedeutung, die dieser Operation in der Ringtheorie zukommt, hinaus gewinnt dieses Problem hier dadurch an Interesse, daß es mit dem Problem der Morita-invarianz dieser Ringklasse übereinstimmt. Leider konnte diese Frage nicht vollständig gelöst werden, was wohl teilweise durch die Tatsache verständlich wird, daß ein Zusammenhang mit einem großen ungelösten Problem der Ringtheorie, dem Köthe-Problem, aufgedeckt werden kann.

Genauer ausgedrückt: Eine negative Lösung des Köthe-Problems, also etwa ein Beispiel eines Ringes, der ein einseitiges, aber kein zweiseitiges Nilideal $\neq 0$ besitzt, würde eine negative Antwort auf die hier gestellte Frage nach sich ziehen. Da nun aber dieses Problem dahingestellt bleiben muß, erscheint es angebracht, den in der Mathematik in solchen Situationen üblichen Weg zu beschreiten und den Gordischen Knoten definitiv zu meistern: Ein Ring R heiße vollständig $\mathcal{T}$ -regulär, wenn jeder Matrixring R_n stark $\mathcal{T}$ -regulär ist. Für die so definierte Ringklasse gilt dann: Vollständig $\mathcal{T}$ -regulär ist jeder stark $\mathcal{T}$ -reguläre PI-Ring (Satz 5.3) sowie jeder Ring, der als Rechtsmodul über einem vollständig $\mathcal{T}$ -regulären Unterring endlich erzeugt ist (Satz 5.4). In Satz 5.5 werden Bedingungen angegeben, die sichern, daß eine $\mathcal{T}$ -reguläre Algebra R über einem kommutativen Ring K vollständig $\mathcal{T}$ -regulär ist. Selbstverständlich ist hierbei vor allem der Fall interessant, in dem K mit dem Zentrum von R übereinstimmt. Die verwendete Formulierung betont aber den Zusammenhang mit der Theorie der algebraischen Algebren, der auch die wesentlichen Gedanken des Beweises entnommen sind. Im Weiteren wird gezeigt, daß die Klasse der vollständig $\mathcal{T}$ -regulären Ringe auch alle Endomorphismenringe endlich präsentierbarer Moduln über vollständig $\mathcal{T}$ -regulären Ringen enthält. Hieraus können in sehr einfacher Weise zwei Resultate von Björk - eines davon sogar in schärferer Form - hergeleitet werden. Den

Abschluß des fünften Abschnitts und damit der ganzen Arbeit bildet eine kurze Erörterung zur Problematik stark bzw. vollständig Γ -regulärer Gruppenringe. Von Interesse dürfte hierbei die - vielleicht nicht unbedingt überraschende - Rückkehr zu der zu Beginn dieses Abschnitts erörterten Problematik sein, wie sie im abschließenden Resultat zum Ausdruck kommt. Vielleicht mag dieses wiederholte Berühren eines größeren Problems als Indiz für eine gewisse Abgerundetheit der Arbeit gelten können - in jedem Falle aber dürfte hier eine Aufgabe sichtbar werden, deren Bewältigung ein gewisses Maß an Anstrengungen lohnen wird.

Vorbemerkungen formaler Art dürften zum Verständnis der vorliegenden Arbeit nicht nötig sein, da alle vorkommenden Bezeichnungen, soweit sie nicht unbedingt als bekannt vorausgesetzt werden können, mindestens bei ihrem ersten Auftreten erläutert werden. Hinzuweisen ist lediglich auf die der Natur dieser Arbeit entsprechende Generalvoraussetzung, derzufolge alle vorkommenden Ringe ein Einselement besitzen sollen!

Somit bleibt mir nur noch die angenehme Pflicht, den schuldigen Dank abzustatten: Herrn Dr. H. Zöschinger für viele Gespräche und wertvolle Hinweise sowie speziell Herrn Prof. Dr. F. Kasch, dessen Ermutigung und Unterstützung notwendig für das Entstehen dieser Arbeit waren.

1. Π -REGULARITÄTSEIGENSCHAFTEN VON RINGELEMENTEN

DEFINITION. Ein Element a eines Ringes R heiße n -regulär bzw. rechts n -regulär, wenn es ein $b \in R$ gibt mit $a^n b a^n = a^n$ bzw. $a^{n+1} b = a^n$. Gibt es eine natürliche Zahl n , so daß a n -regulär bzw. rechts n -regulär ist, so heiße a Π -regulär bzw. rechts Π -regulär. Analog sei " a links n -regulär" bzw. " a links Π -regulär" verstanden. Schließlich heiße a stark n -regulär bzw. stark Π -regulär, wenn a rechts und links n -regulär bzw. Π -regulär ist. Ein Ideal I des Ringes R , insbesondere also auch R selbst, besitze definitionsgemäß eine der obigen Eigenschaften, wenn jedes Element von I diese Eigenschaft besitzt.

Die soeben definierten Begriffe gehen im Wesentlichen auf McCoy $\boxed{24}$ und Azumaya $\boxed{3}$ zurück. Man vergleiche auch Fuchs-Rangaswamy $\boxed{16}$.

Der Begriff eines stark Π -regulären Ringelementes, der zunächst in den Vordergrund der Untersuchung gestellt werden soll, ist eine gleichzeitige Verallgemeinerung der in der Ringtheorie fundamentalen Begriffe "Einheit", "Idempotent", "nilpotentes Element" sowie des Begriffs eines algebraischen Elementes in einer Algebra. Andererseits ist er nicht nur definitionsgemäß stärker als die Begriffe "rechts Π -reguläres" bzw. "links Π -reguläres Ringelement", sondern impliziert auch Π -Regularität, wie man etwa aus folgendem Lemma sieht:

LEMMA 1.1. Sind a, b, c Elemente des Ringes R und gilt: $a^{n+1}b = a^n$ und $c a^{m+1} = a^m$, so gelten auch:

- (i) $(a^n b^{n+1}) a^{m+1} = a^m = a^{m+1} (a^n b^{n+1})$,
- (ii) $(a^n b^{n+1}) a^{n+1} = a^n = a^{n+1} (a^n b^{n+1})$.

BEWEIS. (i) folgt nach Multiplikation von links mit $c^{n+1} a^{n+1}$, wobei im ersten Fall $a^n b^{n+1} = a^{n+m} b^{n+m+1}$ zu beachten ist. Die erste Gleichung von (ii) erhält man nach Multiplikation von rechts mit $a^m b^m$ unter Beachtung von (i). Die letzte Gleichung schließlich versteht sich von selbst.

Nach diesen eher technischen Vorbereitungen sollen nun die Eigenschaften stark $\mathcal{N}$ -regulärer Ringelemente im folgenden Satz zusammengefaßt werden. Die einzelnen Aussagen dieses Satzes finden sich im Wesentlichen auch bei Drazin [11].

SATZ 1.2. Ist a ein stark $\mathcal{N}$ -reguläres Element des Ringes R , dann gibt es eine natürliche Zahl n und ein $\hat{a} \in R$, so daß gilt:

- (i) $a^{n+1} \hat{a} = a^n$, (ii) $a \hat{a}^2 = \hat{a}$,
- (iii) $\hat{a}$ kommutiert mit allen Elementen, mit denen auch a kommutiert.

Ist ferner $b \in R$ und m eine natürliche Zahl mit $a^{m+1} b = a^m$ und $a b^2 = b$, so folgt $b = \hat{a}$.

Ist $f: R \rightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, so ist $f(a)$ stark $\mathcal{N}$ -regulär in S und es gilt: $f(\hat{a}) = \widehat{f(a)}$.

BEWEIS. Sei $b \in R$ mit $a^{n+1} b = a^n$. Mit $\hat{a} := a^n b^{n+1}$ gilt nach Lemma 1.1: $a^{n+1} \hat{a} = a^n = \hat{a} a^{n+1}$. Multiplikation der letzten Gleichung von links mit a und von rechts mit b liefert: $a \hat{a} a^n = a^n$, woraus (ii) folgt. Sei nun ein $x \in R$ gegeben mit $a x = x a$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \hat{a} x &= a^{n+1} \hat{a}^{n+2} x = \hat{a}^{n+2} x a^{n+1} = \hat{a}^{n+2} x a^{2n+2} \hat{a}^{n+1} = \\ &= a^n x \hat{a}^{n+1} = x a^n \hat{a}^{n+1} = x \hat{a}. \end{aligned}$$

Gilt nun für ein $b \in R$: $a^{m+1} b = a^m$ und $a b^2 = b$, so folgt: $\hat{a} = \hat{a}^{m+1} a^m = \hat{a}^{m+1} a^{2m+n+1} b^{m+n+1} = a^{m+n} b^{m+n+1} = b$. Die letzte Aussage ist nun trivial.

BEMERKUNG. Die bisher definierten Begriffe lassen sich ohne weiteres auf Halbgruppen übertragen. Dabei bleiben - mutatis mutandis - die Aussagen von Lemma 1.1 und Satz 1.2 gültig.

FOLGERUNG 1.3. Ist a ein stark $\mathcal{T}$ -reguläres Element des Ringes R , dann gibt es eine Einheit $u \in R$ mit: $a^{n+1} u = a^n$ und $a u = u a$.

BEWEIS. Man wähle $u := 1 + \hat{a} - a \hat{a}$. Dann ist $u^{-1} = 1 - a \hat{a} + a^2 \hat{a}$. Der Rest der Behauptung ist klar.

Wie bereits erwähnt, impliziert die starke $\mathcal{T}$ -Regularität eines Ringelementes jede der drei anderen $\mathcal{T}$ -Regularitätseigenschaften. Diese sind untereinander jedoch unabhängig, wie sofort gezeigt werden wird. Hierzu ist folgende Definition nützlich:

DEFINITION. Ein Ring R heiße von-Neumann-endlich oder kurz endlich, wenn für alle a und $b \in R$ gilt:
 $a b = 1 \implies b a = 1$.

Die einfachsten und wichtigsten Beispiele nicht endlicher Ringe sind die vollen Endomorphismenringe unendlichdimensionaler Vektorräume. Ist nun R ein nicht endlicher Ring, so gibt es $a, b \in R$: $a b = 1 \neq b a$. Dann ist a rechts π -regulär und π -regulär, aber nicht links π -regulär. In $R \times R$ ist das Element $c := (a, b)$ π -regulär, aber weder rechts noch links π -regulär. In dem von a und b^2 erzeugten Unterring von R ist a rechts π -regulär, aber nicht π -regulär. Naheliegend ist jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen an den Ring R aus der Rechts- π -regularität bzw. aus der π -Regularität eines Elementes a bereits dessen starke π -Regularität folgt. Eine notwendige Bedingung ist offenbar die Endlichkeit von R .

DEFINITION. Ein Ring R heiße "von beschränktem Zentral-Nilpotenzindex" oder kurz ein BCI-Ring, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß für jedes nilpotente Element $a \in R$ gilt: a^n liegt im Zentrum von R .

Da jeder Ring von beschränktem Nilpotenzindex und jeder C.N.-Ring im Sinne von Nit [26] ein BCI-Ring ist, bildet der folgende Satz eine gleichzeitige Verallgemeinerung von [3 ; Theorem 4] und [26 ; Théorème 2.1].

SATZ 1.4. Ist a ein rechts π -reguläres Element des BCI-Ringes R , so ist a stark π -regulär.

BEWEIS. Es liege die k -te Potenz jedes nilpotenten Elementes von R im Zentrum von R und es gelte:

$a^{n+1} b = a^n$. Dann gilt für $c := (a^n - a^n b^{kn+n} a^{kn+n})$:
 $c^{k+2} = 0$ und $c^k = a^{kn} - a^n b^{2n} a^{kn+n}$. Hieraus folgt:
 $a^{2n} c^k = 0$ und somit nach Voraussetzung: $c^k a^{2n} = 0$,
 was die Links- π -Regularität von a bedeutet.

Man vergleiche hierzu den Beweis von [3 ; Theorem 1], von welchem der hier gegebene eine gestraffte Version darstellt.

Ersetzt man in Satz 1.4 "rechts π -regulär" durch " π -regulär", so wird die Aussage falsch:

Seien A und B die durch $A_{1,1} = 1$, $A_{i,j} = 0$ sonst bzw. $B_{i,j} = 1$ für alle i, j definierten Elemente von $\mathbb{Q}_2$ und sei R der von $X := 2A$ und $Y := 1/2 B$ erzeugte Unterring von $\mathbb{Q}_2$. Es gilt: $X Y X = X$, $Y^2 = Y$.
 X ist in $\mathbb{Q}_2$ stark π -regulär mit $\hat{X} = 1/2 A$.

Da jedes Element von R die Form:

$$Z = \sum a_h X^h + \sum b_i X^i Y + \sum c_k Y X^k + \sum d_j Y X^j Y$$

(mit $a_h, b_i, c_k, d_j \in \mathbb{Z}$) hat, sieht man leicht, daß $\hat{X}$ nicht in R liegt, X in R also nicht stark π -regulär ist. R ist aber als Unterring von $\mathbb{Q}_2$ von beschränktem Nilpotenzindex, insbesondere also ein BCI-Ring.

Das soeben konstruierte Gegenbeispiel verdient auch wegen [3; Theorem 5] Interesse, wo gezeigt wird, daß jeder π -reguläre Ring von beschränktem Nilpotenzindex stark π -regulär ist. Übrigens läßt sich auch dieses Resultat auf BCI-Ringe verallgemeinern.

Da der in obigem Beispiel auftretende Ring R natürlich auch die aufsteigende Kettenbedingung für Rechts- und Linksannulatoren erfüllt, hat dasselbe Beispiel auch in bezug auf [26; Proposition 3.3] Bedeutung, wo bewiesen wird, daß ein rechts π -reguläres Element a eines Ringes R genau dann links π -regulär, also stark π -regulär ist, wenn die Folge der Rechtsannulatoren der Potenzen von a abbricht. Denn auch hier läßt sich zeigen, daß im Fall einer globalen π -Regularitätsbedingung die Situation anders ist.

SATZ 1.5. Sei R ein π -regulärer Ring und erfülle $a \in R$ die aufsteigende Kettenbedingung für die Rechtsannulatoren der Potenzen von a . Dann ist a links π -regulär in R .

BEWEIS. Sei $a^n b a^n = a^n$. Da a^{n+1} wieder π -regulär ist, gibt es ein $m > n$ und ein $c \in R$ mit $a^m c a^m = a^m$. Man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Rechtsannulator von a^n gleich dem Rechtsannulator von a^m ist. Wegen $a^m (c a^m - b a^n) = 0$ folgt: $a^n c a^m = a^n$ und damit die Behauptung.

Die Endlichkeit eines Ringes R kann auch als die Bedingung, daß jedes rechts "0-reguläre" Element von R links π -regulär ist, aufgefaßt werden. Die Halbgruppenalgebra eines Monoids, wie er etwa im Anschluß an Satz 3.1 konstruiert werden wird, zeigt, daß in endlichen Ringen aber nicht jedes rechts π -reguläre Element links π -regulär zu sein braucht. Es kann aber, in Analogie zum letzten Satz, folgende schwächere Aussage bewiesen werden:

SATZ 1.6. Ist R ein endlicher π -regulärer Ring und ist a ein rechts π -reguläres Element von R , so ist a stark π -regulär.

BEWEIS. Wie im Beweis des letzten Satzes kann man eine natürliche Zahl n sowie $b, c \in R$ finden mit:
 $a^n = a^{2n} b = a^n c a^n, c a^n c = c.$
 Man bestätigt: $(c a^n a^n c a^n) (c a^n b c a^n) = c a^n.$
 Da mit R auch der Ring $c a^n R c a^n$ endlich ist, folgt:
 $(c a^n b c a^n) (c a^n a^n c a^n) = c a^n,$ und somit:
 $c a^n b c a^{2n} = c a^n.$ Diese und die daraus abzuleitende Gleichung: $a^n b c a^n = a^n b$ ergeben:
 $c a^n b a^n = c a^n,$ woraus man $a^n b a^n = a^n$ erhält.
 Sei $d := b a^n b.$ Dann gilt: $a^n = a^{2n} d = a^n d a^n$ und $d a^n d = d.$ Da der Ring $a^n d R a^n d$ wieder endlich ist, folgt aus $(a^n d a^n a^n d) (a^n d^2 a^n d) = a^n d$ nun:
 $(a^n d^2 a^n d) (a^n d a^{2n} d) = a^n d,$ was sofort $a^n d^2 a^n = a^n d,$ also mit $a^n d^2 a^{2n} = a^n$ die Behauptung ergibt.

BEWERTUNG. Sowohl in Satz 1.5 als auch in Satz 1.6 könnte die globale π -Regularitätsbedingung durch die Forderung, daß beliebig hohe Potenzen von a π -regulär sein sollen, ersetzt werden. Insbesondere würde also die π -Regularität von a im Sinne von Fuchs-Rangaswamy 16 genügen.

Der nächste Satz gibt eine sehr nützliche Charakterisierung der starken π -Regularität, weshalb auch ein Beweis gegeben wird, obwohl die Aussage (bis auf die "lokale" Formulierung) mit Fisher-Snyder 13; Theorem 2.1] übereinstimmt.

SATZ 1.7. Ein Element a eines Ringes R ist genau dann rechts π -regulär in R , wenn es in jedem primen Faktoring von R rechts π -regulär ist.

BEWEIS. Sei a nicht rechts π -regulär. Dann gilt:
 $0 \notin \{a^n - a^{n+m} x; x \in R, n, m > 0\} =: M$.
 Sei nun I ein Ideal von R mit $I \cap M \neq \emptyset$.
 Ist $a^n - a^{n+m} x \in I$, so auch $a^n - a^{n+m+k} x^k$ für beliebige natürliche Zahlen k . Also gilt für jedes $m \in M$: $I \cap M \neq \emptyset$. Also ist das Produkt zweier Ideale, die mit M nichtleeren Durchschnitt haben, ein Ideal derselben Form. Ist nun J maximal unter den Idealen, die mit M leeren Durchschnitt haben, so ist R/J prim. In R/J ist aber a nicht rechts π -regulär.
 Die Umkehrung ist trivial.

Man beachte, daß zum Beweis dieses Satzes (ebenso wie zum Beweis des folgenden) das Zorn'sche Lemma benötigt wurde, während die vorhergehenden Resultate rein algebraisch erzielt werden konnten.

SATZ 1.8. Ein rechts π -reguläres Element a eines Ringes R ist genau dann stark π -regulär in R , wenn es in jedem subdirekt irreduziblen primen Faktoring von R stark π -regulär ist.

BEWEIS. Sei $a^{n+1}b = a^n$ und a nicht links π -regulär. Dann gilt: $a^n b^{n+1} a^{n+1} - a^n =: c \neq 0$. Sei I maximal unter den Idealen von R , die c nicht enthalten. Man sieht, daß auch das Element :

$$d := (a^n b^{n+1})^{n+1} a^{2n+1} - a^n$$

im Herz H des subdirekt irreduziblen Ringes R/I liegt. Wäre nun $H^2 = 0$, so würde folgen: $d^2 \in I$. Dann wäre aber $a + I$ stark π -regulär in R/I , was nach Satz 1.2 $a^n b^{n+1} a^{n+1} - a^n \in I$, also einen Widerspruch zur Folge hätte. Daher ist $H^2 \neq 0$ und somit R/I prim, womit also ein subdirekt irreduzibler primer Faktoring gefunden ist, in dem (das Bild von) a nicht stark π -regulär ist. Die Umkehrung ist wieder trivial.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch eine einfache, aber nützliche Charakterisierung stark π -regulärer Ringelemente angegeben werden.

SATZ 1.9. Ein Element a eines Ringes R ist genau dann stark π -regulär, wenn es ein stark reguläres, d. h. stark 1-reguläres $b \in R$ und ein nilpotentes $c \in R$ gibt mit: $b + c = a$, $b c = c b = 0$.

BEWEIS. Sei a stark π -regulär in R . Nach Satz 1.2 gibt es ein $\hat{a} \in R$ mit: $a \hat{a} = \hat{a} a$ und $a \hat{a}^2 = \hat{a}$. Aus diesen beiden Beziehungen folgt: $(a \hat{a})^2 = a \hat{a}$. Setzt man nun $b := a (a \hat{a})$, $c := a (1 - a \hat{a})$, so können obige Aussagen unmittelbar verifiziert werden. Die Umkehrung ist trivial.

2. DAS "LIFTEN" VON π -REGULARITÄTSEIGENSCHAFTEN

Ziel der Untersuchungen dieses Abschnittes ist einerseits, das in der Ringtheorie sehr wichtige Hilfsmittel des "Liftens von Idempotenten" auf einen weit größeren Anwendungsbereich auszudehnen, andererseits soll versucht werden, Möglichkeiten und Grenzen eines Konzeptes aufzuzeigen, das in Analogie zum maximalen regulären Ideal von Brown-McCoy [8] oder zum maximalen stark regulären Ideal von Kandô [20] stehen könnte.

Zum Terminus "Liften": Sei A eine Eigenschaft von Ringelementen, B eine Eigenschaft von Idealen. Man sagt, daß Elemente mit A über Ideale mit B geliftet werden können, wenn für jeden Ring R gilt: Ist I ein Ideal von R und $a \in R$ und hat I die Eigenschaft B und $a + I$ (als Element von R/I) die Eigenschaft A, so gibt es ein $i \in I$ mit: $a + i$ hat die Eigenschaft A.

SATZ 2.1. Nilpotente Elemente können über π -reguläre Ideale geliftet werden.

BEWEIS. Sei I ein π -reguläres Ideal und $a^n \in I$. Dann gibt es ein $m \geq n$ und ein $b \in R$ mit: $a^m b a^m = a^m$. Nun gilt: $a b a^m \in I$ und $(a - a b a^m)^m = 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Ob auch Idempotente über π -reguläre Ideale geliftet werden können, bleibt offen. Für den Beweis einer etwas schwächeren Aussage sei Folgendes vorausgeschickt:

LEMMA 2.2. Ist $(a - a^2)$ ein stark π -reguläres Element des Ringes R , so auch a .

BEWEIS. Trivial.

SATZ 2.3. Idempotente können über stark π -reguläre Ideale geliftet werden.

BEWEIS. Sei I ein stark π -reguläres Ideal des Ringes R und $e \in R$ mit $e - e^2 \in I$. Nach Lemma 2.2 gibt es $n, r: e^{n+1} r = e^n$ und $e r = r e$. Man sieht leicht: $e - e^n \in I$ und $e^n - e^{2n} \in I$ und somit auch: $e - e^n r^n = e - e^n - (e^n - e^{2n}) r^n \in I$. Wegen $e^n r^n = (e^n r^n)^2$ ist dies die Behauptung.

BEMERKUNG. Der Beweis dieses Satzes zeigt, daß es zu einem beliebigen Repräsentanten e ein $x \in R$ gibt, so daß $e x = x e$ das Gewünschte leistet. Eine Übertragung des klassischen Verfahrens im Fall von Nilidealen ergibt dann die folgende Erweiterung von Satz 2.3: Über stark π -reguläre Ideale können abzählbar unendliche Systeme paarweise orthogonaler Idempotenter geliftet werden.

Nachdem also untersucht worden ist, inwieweit sich Idempotente über "verallgemeinerte" Nilideale liften lassen, soll jetzt umgekehrt versucht werden, "verallgemeinerte" Idempotente über Nilideale zu liften.

LEMMA 2.4. Ist I ein stark π -reguläres Ideal des Ringes R und $a \in R$ mit: $a+I$ stark n -regulär in R/I , so gibt es ein $b \in R$ mit: $a^{n+1}b - a^n \in I$, $ab - ba \in I$ und $bab = b$.

BEWEIS. Nach Satz 1.2 gibt es ein $r \in R$ mit:
 $a^{n+1}r - a^n \in I$, $ar - ra \in I$, $r - r^2a \in I$. Hieraus folgt, daß ar idempotent modulo I ist. Nach Satz 2.3 und der nachfolgenden Bemerkung gibt es ein $s \in R$ mit:
 $ars = (ars)^2$, $ars = sar$ und $ar - ars \in I$.
 Aus der letzten Beziehung folgt wegen $r - rars \in I$:
 $r - rs \in I$. Sei nun $b := rsars$. Dann gilt:
 $r - b = (r - rs) + (rs - rsars) + (rsars - rsars)$
 Da jeder der drei Terme in I liegt (beim mittleren ist $ars = sar$ zu beachten), liegt auch $r - b$ in I .
 Somit gilt: $a^{n+1}b - a^n \in I$ und $ab - ba \in I$.
 Schließlich kann $bab = b$ unmittelbar verifiziert werden.

Das folgende Beispiel soll zeigen, daß in der Situation des Lemmas nicht wesentlich mehr zu erwarten ist; insbesondere können stark π -reguläre Elemente nicht über stark π -reguläre Ideale geliftet werden.

Zunächst wird eine Klasse von Beispielen stark π -regulärer Ideale bereitgestellt.

LEMMA 2.5. Die Summe aller artinschen Rechtsideale eines beliebigen Ringes R ist ein stark π -reguläres Ideal von R .

BEWEIS. Sei I die Summe aller artinschen Rechtsideale von R . Ist $a \in I$, so liegt a in einer endlichen Summe artinscher Rechtsideale und somit ist $a \in R$ artinsch. Also bricht die absteigende Kette $(a^n R; n \in \mathbb{N})$ ab, was mit der Rechts- π -Regularität von a gleichbedeutend ist. Damit ist I rechts π -regulär, woraus nach dem Hauptergebnis des nächsten Abschnitts die Links- π -Regularität von I folgt. Daß I schließlich zweiseitiges Ideal ist, folgt aus der Tatsache, daß mit $a \in R$ auch $b \in R$ artinsch ist.

Wer den in diesem Beweis durchgeführten Vorgriff nicht mitmachen möchte, kann im Lemma "artinsch" durch "von endlicher Länge" ersetzen und den Beweis unter Beachtung des Abbrechens der aufsteigenden Kette der Rechtsannulatoren der Potenzen von a vollenden. In jedem Fall ergibt sich die folgende Aussage.

FOLGERUNG 2.6. Der rechte oder linke Sockel eines beliebigen Ringes R ist ein stark π -reguläres Ideal von R .

BEISPIEL. Sei V_K ein Vektorraum über dem Körper K mit der Basis $(v_i; i \in \mathbb{N})$ und a dasjenige Element aus $S := \text{End } V_K$, das durch $a(v_1) = 0$, $a(v_{n+1}) = v_n$ definiert ist. Mit I sei das Ideal der endlichwertigen Elemente von S bezeichnet. Dieses stimmt bekanntlich mit dem (linken und rechten) Sockel von S überein und ist damit nach Folgerung 2.6 stark Π -regulär. Klarerweise ist a Einheit modulo I . Sei nun $j \in I$ und $\text{Bild}(j)$ in dem von den v_i mit $i \leq n$ erzeugten Unterraum U von V enthalten. Wegen $a \cdot U \subset U$ gilt auch: $\text{Bild}(a \cdot j) \subset U$. Damit folgt sofort: Ist $p(x, y)$ ein Polynom über K in den nichtkommutierenden Variablen x, y , das keinen y -freien Term hat, so gilt: $\text{Bild}(p(a, j)) \subset U$. Mit der Bezeichnung $(a, j; k) := (a + j)^k - a^k$ ergibt dies: $\text{Bild}((a, j; k)) \subset U$. Allgemein gilt: $\text{Kern}(a^k) \cap \text{Kern}((a, j; k)) \subset \text{Kern}((a + j)^k) \subset \text{Kern}(a^k) \cap \text{Kern}((a, j; k)) + \text{Bild}(a^k) \cap \text{Bild}((a, j; k))$. Mit der Dimensionsformel: $\dim U - \text{Kodim } V \leq \dim U \cap V \leq \dim U$ ergibt dies unter Beachtung von $\text{Bild}(a^k) = V$ sowie $\text{Kodim } \text{Kern}(x) = \dim \text{Bild}(x)$: $k - n \leq \dim \text{Kern}((a + j)^k) \leq k + n$. Also bricht die aufsteigende Folge der Kerne von $(a + j)^k$ nicht ab und deshalb ist $a + j$ nicht links Π -regulär. Durch Betrachtung des Elementes (a, a) des Ringes $R \times R^{\text{op}}$ erhält man ein Beispiel eines modulo einem stark Π -regulären Ideals rechts und links invertierbaren Elementes, das weder als rechts noch als links Π -reguläres Element geliftet werden kann.

In scharfem Kontrast zu der durch dieses Beispiel erhellten Situation läßt sich nun im Fall von Nilidealen eine positive Aussage erzielen. Diese soll aus beweistechnischen Gründen durch das folgende schwächere Resultat vorbereitet werden.

HILFSSATZ 2.7. Ist I ein Nilideal des Ringes R und $c \in R$ mit: $c + I$ stark regulär in R/I , so gibt es ein stark reguläres $r \in R$ mit: $c - r \in I$.

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in R$ mit: $c^2 a - c \in I$, $c a - a c \in I$, $c a^2 - a \in I$.

Nach Lemma 2.4 gibt es ein $b \in R$ mit: $a^2 b - a \in I$, $a b - b a \in I$, $b a b = b$. Hieraus folgt: $b^2 a - b \in I$.

Nach Satz 1.2 (angewandt auf R/I) gilt nun: $b - c \in I$.

Sei S der von a und b erzeugte Unterring von R .

Da $S \cap I$ nil und $S/(S \cap I)$ kommutativ ist, sieht man leicht, daß S endlich ist. Da $a b$ idempotent ist, ist auch $a b S a b$ endlich. Ferner gilt:

$a b^2 a b a^2 b - a b \in I \cap S$. Da $I \cap S$ und damit auch $a b (I \cap S) a b$ nil ist, heißt dies, daß $a b^2 a b a^2 b$ invertierbar in $a b S a b$ ist. Also gibt es ein $x \in R$ mit: $a b^2 a b a^2 b x a b = a b$. Wegen der Endlichkeit von $a b S a b$ folgt hieraus:

$$a b a^2 b x a b^2 a b = a b a^2 b x a b^2 = a b.$$

Multipliziert man beide Gleichungen von links mit b , so ergibt sich: $b^2 a b a^2 b x a b = b = b a^2 b x a b^2$.

Somit ist $r := b$ stark regulär.

SATZ 2.8: Stark Π -reguläre Elemente lassen sich über Nilideale liften.

BEWEIS. Sei I ein Nilideal des Ringes R und seien $a, b \in R$ mit: $a^{n+1} b - a^n \in I, a b - b a \in I, a b^2 - b \in I$. Es gilt trivialerweise: $a = a^2 b + a(1 - a b)$. Da $a^2 b$ stark regulär modulo I ist, gibt es nach dem Hilfssatz ein u und ein $v \in R$ sowie ein $i \in I$ mit: $a^2 b = u + i, u^2 v = u, u v = v u, u v^2 = v$.

Wendet man wieder Satz 1.2 auf R/I an, so erkennt man:

$b - v \in I$. Setzt man $a(1 - a b) =: j$, so gilt:

$u v j \in I, j u v \in I$. Damit gilt auch:

$a = u + i + j = u + (1 - u v)(i + j)(1 - u v) + x$

mit $x = u v(i + j) u v + (1 - u v)(i + j) u v +$

$+ u v(i + j)(1 - u v)$ und somit $x \in I$. Nun ist

aber u stark regulär und $(1 - u v)(i + j)(1 - u v)$

modulo I gleich dem nilpotenten Element $a(1 - a b) + I$

und daher, da I nil ist, selbst nilpotent und es gilt:

$u(1 - u v)(i + j)(1 - u v) = (1 - u v)(i + j)(1 - u v)u$

$= 0$. Damit folgt (siehe Satz 1.9):

$u + (1 - u v)(i + j)(1 - u v)$ ist stark Π -regulär.

Somit ist aber der Satz bewiesen.

Schließlich soll noch ein Beispiel angegeben werden, das zeigt, daß Π -reguläre Elemente nicht einmal über nilpotente Ideale geliftet werden können. Hierzu sind ein paar Vorbereitungen nötig:

1) Eine leichte Variation des im Anschluß an Satz 1.4 angegebenen Beispiels liefert einen Ring R und zwei Elemente $X, Y \in R$ mit: $X = X Y X$, X nicht n -regulär in R für $n > 1$ und $R X R \neq R$.

2) Sind R sowie X und Y mit den in 1) angegebenen Eigenschaften gegeben, so ist in dem von

$$s := \begin{pmatrix} 0 & X \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t := \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$$

erzeugten Unterring S von R_2 das Element s 2-regulär, aber nicht n -regulär für $n = 1$ oder $n > 2$. Man sieht dies in folgender Weise leicht ein:

(a) Das von X in R erzeugte Ideal I ist nach Voraussetzung $\neq R$; in R/I gilt also $1 \neq 0$.

(b) Bei der kanonischen Abbildung $R_2 \longrightarrow (R/I)_2$ werden $1, s, t$ auf untere Dreiecksmatrizen abgebildet. Dasselbe gilt daher auch für den ganzen Ring S .

(c) Gäbe es ein $y \in S$ mit: $s y s = s$, so müßte $y_{1,2} = 1$ sein, was im Widerspruch zu (a) und (b) steht.

(d) Daß schließlich s nicht n -regulär für $n > 2$ sein kann, ist wegen der Voraussetzung über X leicht einzusehen.

3) Sind S sowie s und t mit den in 2) angegebenen Eigenschaften gegeben, so ist in dem von

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

erzeugten Unterring A von S_2 das Element a (trivialerweise) 2-regulär modulo dem von $a^2 - a^2 b a^2$ erzeugten Ideal I . Die Elemente von I haben die Form:

$$i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

mit $r = q (s - s^2 y s)$, $q \in S$. Insbesondere gilt also:

$I^2 = 0$. Wäre nun $a + i$ n -regulär, so müsste zunächst

klarerweise $n = 2$ sein. Außerdem gäbe es ein $y \in S$

mit: $s^2 y s (1 + r) = s (1 + r)$, d. h.:

$(s^2 y s - s) (1 + q (s - s^2 y s)) = 0$. Durch Entwickeln erhielte man hieraus die Regularität von s und somit einen Widerspruch. Also läßt sich das modulo I 2-reguläre Element $a \in A$ nicht zu einem π -regulären Element von A liften.

BEMERKUNG 2.9. Reguläre Elemente können über stark π -reguläre Ideale geliftet werden.

BEWEIS. Sei I ein stark π -reguläres Ideal des Ringes R und $a, x \in R$ mit: $a - a x a \in I$. Nach Satz 2.3

gibt es ein $y \in R$: $(y a)^2 = y a$ und $y a - x a \in I$.

Also gilt auch: $a - a y a \in I$. Hiermit folgt aber wegen $(a y a) y (a y a) = a y a$ die Behauptung.

Wurde bisher gefragt, wann unter der Voraussetzung, daß $a + I$ eine Eigenschaft A besitzt, ein $i \in I$ so gefunden werden kann, daß $a + i$ eben falls A hat, so soll jetzt auf den zweiten in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnten Gedanken eingegangen werden, was auf die Frage hinausläuft, wann unter obiger Voraussetzung alle $a + i$ die Eigenschaft A haben.

Satz 2.10. Ist I ein Nilideal des Ringes R und a ein n -reguläres Element von R mit: $a + I$ rechts n -regulär in R/I , dann ist a rechts n -regulär in R .

BEWEIS. Man kann o. B. d. A. $n = 1$ annehmen. Seien also $b, c \in R$ mit $a b a = a$, $a^2 c - a \in I$. Dann gilt: $b a^2 c b a - b a \in I$. Wiederum bedeutet dies, daß $b a^2 c b a$ in $b a R b a$ invertierbar ist. Also gibt es ein $d \in R$ mit: $b a^2 c b a d = b a$. Linksmultiplikation mit a ergibt nun die Behauptung.

FOLGERUNG 2.11. Ist I ein Nilideal des π -regulären Ringes R und $a \in R$ mit: $a + I$ rechts π -regulär in R/I , dann ist a rechts π -regulär in R .

BEWEIS. Sei a rechts n -regulär modulo I . Nach Voraussetzung gibt es ein m : a^n ist m -regulär. Da a^n auch rechts m -regulär modulo I ist, folgt nun die Behauptung aus Satz 2.10.

Das soeben hergeleitete Resultat steht freilich recht vereinzelt da und läßt auch noch nicht den in der Einleitung zu diesem Abschnitt angesprochenen Zusammenhang mit der Radikaltheorie der Ringe erkennen. Dieser wiederum ist negativer Art, wie folgendes Beispiel eines Ringes R , der ein stark π -reguläres Ideal I mit stark π -regulärem Faktorring R/I besitzt, selbst aber nicht stark π -regulär ist, zeigen soll. Tatsächlich wird in diesem Beispiel R/I sogar Körper sein.

BEISPIEL. Sei V_K ein abzählbar-unendlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und seien a und b aus dem Endomorphismenring S von V_K . Mit I sei das mit dem Sockel von S übereinstimmende Ideal der Endomorphismen mit endlichdimensionalem Bild bezeichnet. Ferner sollen a und b den Bedingungen: (i) $a b = 1$, (ii) $\text{Kern}(a)$ endlichdimensional, (iii) $\bigcup_n \text{Kern}(a^n) = V$ genügen. $K\langle x \rangle$ sei der Quotientenkörper des Potenzreihenringes über K in der Unbestimmten x . Bekanntlich kann jedes Element von $K\langle x \rangle$ eindeutig in der Form $r(x) = \sum_{i \geq z} u_i x^i$ mit einer ganzen (!) Zahl z dargestellt werden. Ersetzt man in dieser Darstellung x^i durch a^i , falls $i \geq 0$ ist, und durch b^i , falls $i < 0$ ist, so erhält man wegen (iii) ein eindeutig bestimmtes Element von S . Ebenfalls unter Ausnutzung von (iii) zeigt man, daß die so beschriebene Zuordnung $A: K\langle x \rangle \rightarrow S$ ein K -Vektorraumhomomorphismus ist. R sei nun der von I und dem Bild von A erzeugte Unterring von S und B der aus A

durch Einschränkung des Zieles auf R entstehende Homomorphismus. Seien nun $r(x)$ und $s(x)$ Elemente von $K\langle x \rangle$. Dann gibt es eine natürliche Zahl k , so daß $x^k r(x)$ und $x^k s(x)$ im Potenzreihenring $K[[x]]$ liegen.

Durch Ausmultiplizieren verifiziert man nun:

$$a^k (A(r(x) \cdot s(x)) - A(r(x))A(s(x))) = 0.$$

Bezeichnet man jetzt mit C den kanonischen Homomorphismus von R auf R/I , so folgt aus dieser Gleichung wegen (ii), daß $C: K\langle x \rangle \rightarrow R/I$ ein Ringhomomorphismus ist. Nach Definition von R ist C surjektiv und damit ein Isomorphismus. Ferner ist I stark π -reguläres Ideal von S und damit auch von R . Da schließlich R nicht endlich ist, ist hiermit das gewünschte Beispiel gefunden.

Schließlich soll bei dieser Gelegenheit noch auf einen anderen Aspekt dieses Beispiels hingewiesen werden:

Der soeben konstruierte Ring R ist regulär! Dies folgt unmittelbar aus der Theorie des Brown-McCoy'schen "maximalen regulären Ideales". Man vergleiche hierzu Folgerung 2.11 !

3. STARK π -REGULÄRE RINGE

Die Klasse der stark π -regulären Ringe hat bisher in der Fachliteratur recht wenig Beachtung gefunden. Das folgende Resultat, dessen hier angegebenen Beweis ich Herrn H. Zöschinger verdanke, sollte aber das Interesse für diese Ringklasse wesentlich fördern.

SATZ 3.1. Ein Ideal I eines Ringes R ist genau dann rechts π -regulär, wenn es stark π -regulär ist.

BEWEIS. Sei a ein beliebiges Element von I . Nach Voraussetzung gibt es ein $b \in I$ mit: $a^{n+1} b = a^n$ und ebenso ein $c \in I$ mit: $b^{m+1} c = b^m$. Da nur zu zeigen ist, daß a links π -regulär ist, kann zu einer beliebigen Potenz von a übergegangen werden, wodurch $n = m = 1$ erreicht werden kann. Schließlich gibt es noch ein $d \in I$ mit: $(c - a)^{k+1} d = (c - a)^k$. Aus diesen Voraussetzungen ergibt sich:

$$(1) \quad a c = a^3 b^2 c = a^3 b = a^2 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad a b c = a^2 b^2 c = a^2 b = a.$$

Aus (1) folgt sofort

$$(3) \quad (c - a)^2 = c (c - a) \quad \text{und hieraus wegen (2):}$$

$$(4) \quad a b (c - a)^2 = 0.$$

Ferner folgt aus (3) wegen $b^2 c = b$:

$$(5) \quad b^2 (c - a)^2 = b (c - a)$$

und hieraus wiederum wegen der letzten Voraussetzung

$$(6) \quad b (c - a)^2 d = b^k (c - a)^{k+1} d = b (c - a).$$

Aus (5) und (6) ergibt sich:

$$(7) \quad b(c - a)d = b^2(c - a).$$

Wegen (6) und (4) gilt:

$$(8) \quad a b(c - a) = 0, \text{ woraus zusammen mit (7) folgt:}$$

$$(9) \quad a b^2(c - a) = 0. \text{ Dies ergibt wegen } b^2 c = b :$$

$$(10) \quad a b = a b^2 a.$$

Andererseits liefern (2) und (8):

$$(11) \quad a = a b a.$$

Aus (10) und (11) folgt schließlich unmittelbar:

$$(12) \quad a = a b^2 a^2 \text{ und damit die Behauptung.}$$

Entsprechend der im Anschluß an Satz 1.2 gemachten Bemerkung erhebt sich natürlich auch hier die Frage, ob die Aussage dieses Satzes auf Halbgruppen ausgedehnt werden kann. Dies ist aber bemerkenswerterweise nicht der Fall, wie das Beispiel der Halbgruppe H derjenigen surjektiven Endomorphismen eines unendlichdimensionalen Vektorraumes V_K , die unendlichdimensionalen Kern haben, lehrt. Ist nämlich $h \in H$, so gilt: $V \cong V/\text{Kern}(h) \cong V/\text{Kern}(h^2)$ und es gibt einen Unterraum U von $\text{Kern}(h)$ mit: $U \cong \text{Kern}(h) \cong \text{Kern}(h^2)$ und $U \cong \text{Kern}(h)/U$. Somit ist H sogar rechts 1-regulär, aber trivialerweise nicht links $\mathcal{T}$ -regulär. Durch Hinzunahme aller Automorphismen von V_K kann die Halbgruppe H zu einem Monoid H' erweitert werden, wobei beide Aussagen gültig bleiben. In diesem Falle gibt es dann zu jedem $h \in H'$ eine Einheit $u \in H'$ mit: $h^2 u = h$.

Trotz des in Satz 1.2 festgestellten gutartigen Verhaltens stark π -regulärer Ringelemente bei Ringhomomorphismen erscheint eine Betrachtung der vollen Unterkategorie der stark π -regulären Ringe in bezug auf die Kategorie aller Ringe und Ringhomomorphismen wenig aussichtsreich, und zwar weder im unitären noch im nicht unitären Fall. So erkennt man in beiden Fällen leicht, daß diese Unterkategorie weder reflexiv noch koreflexiv ist. Sie ist weder gegen Unterobjekte noch gegen (unendliche) Produkte abgeschlossen. Dagegen ist die Abgeschlossenheit gegen endliche Produkte und Faktorringe trivial. Ferner kann folgendes leicht aus Satz 1.2 hergeleitet werden:

SATZ 3.2. Der Durchschnitt beliebig vieler stark π -regulärer Unterringe eines beliebigen Ringes ist stark π -regulär.

FOLGERUNG 3.3. Jeder Unterring eines stark π -regulären Ringes R ist in einem kleinsten stark π -regulären Unterring von R enthalten.

Hierzu ist folgende Ergänzung von Interesse:

SATZ 3.4. Ist $i: R \rightarrow S$ ein Ringmonomorphismus und ist S , aber kein echter, $\text{Bild}(i)$ enthaltender Unterring von S stark π -regulär, so ist i Epimorphismus.

BEWEIS. Seien $f, g: S \longrightarrow T$ zwei Ringhomomorphismen, deren Einschränkungen auf R übereinstimmen. Mit R' sei der Differenzkern von f und g bezeichnet. Ist nun $a \in R'$, so gilt: $f(\hat{a}) = f(a \hat{a}^2) = f(a^n \hat{a}^{n+1}) =$
 $= f(a^n) f(\hat{a}^{n+1}) = g(a^n) f(\hat{a}^{n+1}) = g(\hat{a}^{n+1} a^{2n+1}) f(\hat{a}^{n+1})$
 $= g(\hat{a}^{n+1}) g(a^{2n+1}) f(\hat{a}^{n+1}) = g(\hat{a}^{n+1}) f(a^{2n+1}) f(\hat{a}^{n+1}) =$
 $= g(\hat{a}^{n+1}) f(a^n) = g(\hat{a}^{n+1}) g(a^n) = g(\hat{a})$, woraus folgt,
 daß R' stark $\cap$ -regulär ist. Wegen $R \subset R'$ folgt nun
 $R' = S$ und somit die Behauptung.

Folgerung 3.3 legt nahe, die (im Falle ihrer Existenz eindeutig bestimmte) "stark $\cap$ -reguläre Hülle" eines Ringes R , der in einem Oberring S enthalten ist, zu betrachten. Wenn sich auch dieser Zwischenring im Sinne von Satz 3.4 "nicht allzu weit von R entfernen" kann, so hängt er doch auch wesentlich vom Ring S ab, wie man etwa an der Einbettung von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ bzw. in das Produkt aller Primkörper erkennen kann. Daß sich dieser Umstand auch durch zusätzliche Forderungen nicht beseitigen lassen wird, zeigt z. B. die bekannte Tatsache, daß im Falle eines nichtkommutativen Integritätsringes nichtisomorphe Quotientenkörper auftreten können. Nimmt man an, daß der totale Quotientenring des Ringes R existiert und in S enthalten ist, so ist dieser auch in der "stark $\cap$ -regulären Hülle von R in S " enthalten, da ein stark $\cap$ -regulärer Ring mit seinem totalen Quotientenring übereinstimmt. Doch kann diese Inklusion echt sein, wie man am Beispiel

des folgenden Ringes erkennt: Sei K ein Körper, S der Potenzreihenring über K in einer Variablen x , I eine unendliche Menge und R die von $x S^{(I)}$ erzeugte unitäre K -Unteralgebra von S^I . Ist nun T der Quotientenkörper von S , so kann R in den (stark) regulären Ring T^I eingebettet werden. Ferner ist R offenbar sein eigener totaler Quotientenring, aber nicht stark π -regulär.

Man kann Satz 3.4 auch noch durch die Bemerkung ergänzen, daß kommutative (stark) π -reguläre Ringe "saturiert" sind, d. h. daß jeder Epimorphismus von Ringen, dessen Quelle kommutativ und stark π -regulär ist, surjektiv ist. Im nichtkommutativen Fall gilt Entsprechendes bekanntlich (siehe [33; Beispiel 3.8]) nicht einmal für artinsche Ringe.

Leicht einzusehen ist auch folgendes bekannte Resultat:

SATZ 3.5. Für einen kommutativen Ring R sind äquivalent:

- (1) R ist (stark) π -regulär.
- (2) Jedes Primideal von R ist maximal.
- (3) Der Faktorring von R nach seinem Primradikal $\text{rad}(R)$ ist (stark) regulär.

Zum Nachweis der Äquivalenz von (1) und (2) genügt hierbei die schwächere Voraussetzung " R ist P. I.-Ring" (vgl. Fisher/Snider [13; Theorem 2.3]).

Daß im allgemeinen Fall von der Aussage des Satzes 3.5 nichts erhalten bleibt, zeigt folgendes Beispiel eines primitiven stark Π -regulären Ringes, der weder einfach noch regulär ist: Sei V_K ein unendlichdimensionaler Vektorraum und $S := \text{End}(V_K)$. Ferner sei x ein Element von S mit unendlichdimensionalem Bild und $x^2 = 0$. Ist dann R der vom Sockel von S und x erzeugte Unterring von S , so ist R offenbar nicht einfach und nicht regulär, da x nicht regulär in R ist. R ist aber stark Π -regulär, wie die folgende Überlegung zeigt:

Ist $r = a \cdot 1 + b \cdot x + i$, $a, b \in K$, $\text{Bild}(i)$ endlichdimensional, ein beliebiges Element von R und e eine Projektion (als Element von S aufgefaßt) von V auf den Unterraum $\text{Bild}(i) + x \cdot \text{Bild}(i)$, so ist zunächst $\text{Bild}(e)$ endlichdimensional und daher $e \in R$. Nach Konstruktion von e gilt: $(1 - e) r e = 0$ sowie $(1 - e) r (1 - e) = a(1 - e) + b(1 - e) x (1 - e)$ und schließlich $((1 - e) x (1 - e))^2 = 0$. Damit wird $(1 - e) r (1 - e)$ stark Π -regulär in $(1 - e) R (1 - e)$. Da ferner $e r e$ im Sockel von S liegt und damit auch in R stark Π -regulär ist, überlegt man sich schnell, daß auch r stark Π -regulär in R sein muß.

Zum Beweis von Satz 3.5 sei noch bemerkt, daß sich die Äquivalenz von (1) und (2) sehr leicht mit Hilfe von Satz 1.7 zeigen läßt. Dieser Hinweis soll im Abschnitt 5 wieder aufgegriffen werden, wo hiermit (und mit dem folgenden Resultat) ein sehr einfacher Beweis für einen Satz von Vasconcelos ($\square$ 35 ; Theorem) gegeben werden

wird. Letzterer besagt, daß in einem kommutativen Ring R genau dann jedes Primideal maximal ist, wenn jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Moduls surjektiv ist. Ob die folglich im kommutativen Fall richtige Aussage, daß für einen stark π -regulären Ring R jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Rechtsmoduls surjektiv ist, auch für nichtkommutative Ringe zutrifft, ist offen. Es gilt aber jedenfalls das Folgende:

SATZ 3.6. Ein Ring R ist genau dann stark π -regulär, wenn jeder injektive Endomorphismus eines zyklischen R -Rechtsmoduls surjektiv ist.

BEWEIS. Sei R stark π -regulär und a ein injektiver Endomorphismus des zyklischen R -Rechtsmoduls M_R . Man kann o. B. d. A. annehmen, daß $M = R/I$ mit einem Rechtsideal I von R gilt. Dann ist a die Linksmultiplikation mit einem Element $a \in R$, für das $aI \subset I$ gilt. Die Injektivität von a hat $a(R \setminus I) \subset (R \setminus I)$ zur Folge. Mit der Bezeichnung $r(x)$ für den Rechtsannulator des Ringelementes x folgt aus der Rechts- π -Regularität von a , daß es eine natürliche Zahl n gibt mit: $aR + r(a^n) = R$. Ist $y \in r(a^n)$, so gilt also $a a^{n-1} y = 0 \in I$ und somit $a^{n-1} y \in I$. Rekursiv erhält man: $y \in I$. Hiermit ist aber gezeigt: $aR + I = R$, was der Behauptung entspricht.

Gelte nun umgekehrt, daß jeder injektive Endomorphismus eines zyklischen R -Rechtsmoduls surjektiv ist, und sei $a \in R$. Ist I_a die Vereinigung der Rechtsannulatoren aller Potenzen von a , so ist ein Element $y \in R$ genau dann in I_a , wenn ay in I_a liegt. Hieraus folgt, daß a einen injektiven Endomorphismus von R/I_a induziert, der wiederum nach Voraussetzung surjektiv ist. Also gibt es ein $b \in R$ mit: $ab - 1 \in I_a$ und somit auch eine natürliche Zahl n : $a^n(ab - 1) = 0$. Dies besagt gerade, daß a rechts Π -regulär ist. Mit Satz 3.1 erhält man jetzt die Behauptung.

FOLGERUNG 3.7. Gilt für jeden zyklischen R -Rechtsmodul eines Ringes R , daß seine injektiven Endomorphismen surjektiv sind, so gilt dasselbe auch für jeden zyklischen R -Linksmodul.

Mit Hilfe von Satz 1.2 ist auch das folgende Resultat leicht einzusehen:

Satz 3.8. Ist M eine beliebige Teilmenge des stark Π -regulären Ringes R , so ist der Zentralisator von M in R stark Π -regulär.

FOLGERUNG 3.9. Jeder maximale kommutative Unter-ring eines stark Π -regulären Ringes ist stark Π -regulär.

Für die weitere Diskussion stark Π -regulärer Ringe sollen noch einige elementare Tatsachen bereitgestellt werden.

LEMMA 3.10. Ist a ein Π -reguläres Element des Ringes R und liegt a im Radikal oder im linken oder rechten singulären Ideal von R , so ist a nilpotent.

BEWEIS. Es ist nur zu beachten, daß weder das Radikal noch das linke oder rechte singuläre Ideal ein Idempotent $\neq 0$ enthalten können.

Es sei daran erinnert, daß ein Ring R Zornring heißt, wenn jedes Rechtsideal von R , das nur ein Idempotent (nämlich 0) enthält, nil ist. Dieser Begriff ist nicht seitenabhängig.

FOLGERUNG 3. 11. Ein Π -regulärer Ring ist Zornring und seine beiden singulären Ideale sind (deshalb) nil.

Um die Wirkung von Endlichkeitsbedingungen auf Zornringe und damit auch auf (stark) Π -reguläre Ringe zu studieren, sollen nun drei Bedingungen dieser Art eingeführt werden, deren Studium vielleicht auch an sich von Interesse ist. Sie besitzen darüberhinaus auch eine gewisse begriffliche Verwandtschaft zur starken Π -Regularität, auf die ebenfalls eingegangen werden soll.

DEFINITION. Die Eigenschaft eines Ringes R , daß für jede Folge (a_i) von Elementen von R eine natürliche Zahl n existiert, so daß der Rechtsannulator $r(a_n \cdot \dots \cdot a_1)$ gleich dem (bzw. groß im) Rechtsannulator $r(a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_1)$ ist, werde mit (E) (bzw. (F)) bezeichnet. Ferner habe R die Eigenschaft (G), wenn der Faktoring von R nach seinem rechten singulären Ideal die Eigenschaft (E) hat.

SATZ 3.12. Seien die folgenden Aussagen über den Ring R gegeben:

- (1) R ist rechts perfekt.
- (2) R hat (E).
- (3) R hat (F).
- (4) R hat (G).
- (5) R hat keine unendliche Menge orthogonaler Idempotenter.
- (6) R ist endlich.
- (7) R ist endlichdimensional als Rechtsmodul über R .

Dann gilt: $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5) \implies (6)$
und $(7) \implies (3)$.

BEWEIS. $(1) \implies (2)$: Die R $a_i \cdot \dots \cdot a_1$ bilden eine absteigende Kette von Linkshauptidealen, die nach Voraussetzung abbricht. Gilt aber R $a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_1 = R$ $a_i \cdot \dots \cdot a_1$, so folgt $r(a_{i+1} \cdot \dots \cdot a_1) = r(a_i \cdot \dots \cdot a_1)$.

$(2) \implies (3)$: Trivial.

$(3) \implies (4)$: Sei (a_i) eine Folge von Elementen von R und

gelte: $r(a_n \cdots a_1)$ ist groß in $r(a_{n+1} \cdots a_1)$. Sei ferner $a_{n+1} \cdots a_1 x$ im rechten singulären Ideal von R . Dann gibt es ein großes Rechtsideal I von R mit:

$x, I \subset r(a_{n+1} \cdots a_1)$ und somit ein Rechtsideal J von R mit: $x J$ groß in $x I$ und $x J \subset r(a_n \cdots a_1)$. Nimmt man an (was o. B. d. A. möglich ist), daß J das Urbild von $x J$ bei der kanonischen Abbildung $I \rightarrow x I$ ist, so ist J groß in I und damit in R . Somit ist aber auch $a_n \cdots a_1 x$ im rechten singulären Ideal von R , was zu zeigen war.

(4) $\implies$ (5): Zunächst wird gezeigt, daß der Faktorring von R nach seinem rechten singulären Ideal keine unendliche Menge orthogonaler Idempotenter besitzt. Sind nämlich die Idempotenten e_i paarweise orthogonal, so gilt für $a_i := 1 - e_1 - \cdots - e_i$: $a_n \cdots a_1 = a_n$. Nach Voraussetzung gibt es also ein n mit $r(a_n) = r(a_{n+1})$, d. h. mit: $(e_1 + \cdots + e_n) R = (e_1 + \cdots + e_{n+1}) R$. Dies liefert $e_{n+1} = 0$, woraus die Behauptung leicht abzuleiten ist.

Sei nun R ein Ring, dessen Faktorring nach dem Ideal I keine unendliche Menge orthogonaler Idempotenter enthält, und enthalte I kein Idempotent außer 0. Ist dann M eine Menge orthogonaler Idempotenter in R , so ist die Menge der Bilder von M unter dem kanonischen Homomorphismus von R auf R/I ebenfalls eine Menge orthogonaler Idempotenter. Sind e und f zwei Elemente aus M , deren Bilder hierbei übereinstimmen, so liegt $e - f$ und damit $(e - f)^2 = e + f$ in I . Wegen $(e + f)^2 = e + f$

folgt $e + f = 0$ und deshalb $e = -f = (-f)^2 = f$. Also würde eine unendliche Menge orthogonaler Idempotenter in R eine ebensolche Menge in R/I induzieren und so zu einem Widerspruch führen.

Somit ist auch diese Implikation vollständig bewiesen.

(5) $\implies$ (6): Für $a, b = 1$ sind $b^n a^n - b^{n+1} a^{n+1} =: e_n$ eine Familie paarweise orthogonaler Idempotenter. Nach Voraussetzung gibt es also zwei verschiedene natürliche Zahlen m und n mit $e_n = e_m$. Hieraus folgt aber $e_n = 0$ und somit $b^n a^n = b^{n+1} a^{n+1}$. Nach Multiplikation mit a^n von links und mit b^n von rechts folgt weiter:

$b, a = 1$ und somit die Behauptung.

(7) $\implies$ (3): Trivial, da für endlichdimensionale Moduln immer gilt: ist (A_i) eine aufsteigende Kette von Untermoduln, so gibt es eine natürliche Zahl n , so daß A_n groß in A_{n+1} ist.

Damit ist Satz 3.12 bewiesen.

BEMERKUNG. (E) ist offenbar äquivalent zu: Für jede Folge (a_i) gibt es eine natürliche Zahl n , so daß für alle $h, k > n$ gilt: $r(a_h \cdots a_1) = r(a_k \cdots a_1)$. Analoges gilt für (F) und (G).

LEMMA 3.13. Ist R ein Ring mit (E) und I ein von Null verschiedenes Linksideal von R , so gibt es ein Element a in I , $a \neq 0$, mit: Ist $b \in Ra$ und ist $r(b)$ echt größer als $r(a)$, so ist $b = 0$.

BEWEIS. Sei $a_1 \in I$ und $a_1 \neq 0$. Hat a_1 nicht die gewünschten Eigenschaften, so gibt es ein $a_2 \in R$ mit:

$a_2 a_1 \neq 0$ und $r(a_2 a_1)$ echt größer als $r(a_1)$.

Analog erhält man, wenn $a_n \cdots a_1$ nicht die gewünschten Eigenschaften hat, ein $a_{n+1} \in R$ mit: $a_{n+1} \cdots a_1 \neq 0$ und $r(a_{n+1} \cdots a_1)$ echt größer als $r(a_n \cdots a_1)$. Da nach Voraussetzung dieser Prozeß abbrechen muß, ist somit das Lemma bewiesen.

SATZ 3.14. Ist R ein Ring mit (E), so ist das rechte singuläre Ideal von R nil und jedes nile Linksideal $\neq 0$ enthält ein nilpotentes Linksideal $\neq 0$.

BEWEIS. Ist a (mit $a \neq 0$) aus dem rechten singulären Ideal von R , so gilt: $r(a) \cap aR \neq 0$ und deshalb ist $r(a)$ echt in $r(a^2)$ enthalten. Da nach Voraussetzung die Kette der $r(a^i)$ abbricht, muß a nilpotent sein. Sei nun I ein niles Linksideal von R , $I \neq 0$, und $a \in I$ mit den in Lemma 3.13 angegebenen Eigenschaften. Ist s ein beliebiges Element von R , so ist nach Voraussetzung $s a$ nilpotent. Gilt $(s a)^n = 0$ und ist $n \geq 2$, so folgt wegen $(s a)^{n-1} s a = 0$ entweder $(s a)^{n-1} = 0$ oder $a s a = 0$. Durch Fortsetzung des Verfahrens erhält man in jedem Falle $a s a = 0$ und damit $(R a R)^2 = 0$.

Ein Teil der Aussage dieses Satzes ergäbe sich auch unmittelbar aus dem nächsten Satz.

SATZ 3.15. Ist R ein Ring mit (E) , so ist das Primradikal von R das größte Nilideal in R .

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus der elementweisen Charakterisierung des Primradikals in Shock [31; Proposition 1].

SATZ 3.16. Ein Zornring mit (E) ist semiperfekt und stark π -regulär.

BEWEIS. Daß ein Zornring ohne unendliche Menge orthogonaler Idempotenter semiperfekt ist, ist leicht einzusehen und bekannt (vgl. Nita [27]). Nach Satz 3.15 ist aber das Primradikal eines Zornringes mit (E) gleich seinem (Jacobson-) Radikal. Also ist in unserem Falle der Faktorring des Ringes nach seinem Primradikal halbeinfach und somit stark π -regulär. Aus Satz 1.7 erhält man nun die Behauptung.

SATZ 3.17. Ein Zornring mit (F) , insbesondere also ein rechts endlichdimensionaler Zornring, ist semiperfekt und sein Faktorring nach seinem rechten singulären Ideal ist stark π -regulär.

BEWEIS. Die Aussagen dieses Satzes folgen unmittelbar aus Satz 3.16 (zusammen mit seinem Beweis) und aus Satz 3.12.

Daß ein Zornring mit (E), selbst wenn er rechts und links nichtsingulär ist, nicht perfekt zu sein braucht, zeigt folgendes Beispiel:

Sei K der Primkörper GF_2 und A ein Vektorraum über K mit der Basis $\{e_{ik}; i, k \in \mathbb{Z}, i > k\} \cup \{e\}$. Mit der Multiplikation $e_{ik} e_{jl} := \delta_{kj} e_{il}$ und $e e_{ik} := e_{ik} =: e_{ik} e$ wird A zu einer unitären Algebra über K . Offenbar ist das von den e_{ik} erzeugte Ideal nil, so daß A zu einem lokalen Ring mit niltem Radikal und somit zu einem Zornring wird. Die Teilmengen von A , die aus den Summen von e_{rk} mit festem r bestehen, sind Rechtsideale A_r von A , deren direkte Summe das Radikal ist. Diese Rechtsideale sind koirreduzibel: Sind $a = \sum e_{rk_i}$ und $b = \sum e_{rj_i}$ Elemente von A_r und ist k_n bzw. j_m das Maximum der k_i bzw. j_i und $s > k_n$ und $s > j_m$, so gilt: $a e_{k_n s} = e_{rs} = b e_{j_m s}$. Ist nun $a \in A$, so enthält der Rechtsannulator $r(a)$ fast alle A_r und hat deshalb ein endlichdimensionales Durchschnittskomplement in R . Also gilt für jede aufsteigende Folge von Rechtsannulatoren $r(a_i)$: Es gibt eine natürliche Zahl n , so daß für alle $k \geq j \geq n$ $r(a_j)$ groß in $r(a_k)$ ist. Da ferner für $a \neq 0$ der Durchschnitt von $r(a)$ mit mindestens einem A_r gleich Null ist, erkennt man, daß A rechts nichtsingulär ist. Daher sind die Rechtsannulatoren von Elementen von A abgeschlossen in A , was zusammen mit obiger Überlegung ersichtlich macht, daß A die aufsteigende Kettenbedingung für Rechtsannulatoren von Elementen erfüllt. Der Isomorphismus: $R \ni e_{ik} \mapsto e_{-k, -i} \in R^{op}$

zeigt, daß die analogen linksseitigen Aussagen über A ebenfalls richtig sind. Wählt man schließlich $a_i := e_{i,i+1}$, so liegen alle a_i im Radikal von A und das Produkt der ersten n von ihnen ist immer ungleich 0: $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = e_{1,n}$. Damit ist A weder rechts noch links perfekt.

Ebenso wie der Begriff "rechts perfekt" zur Bedingung (E) abgeschwächt wurde, kann aus dem Begriff "stark Π -regulär" die (offenbar ebenfalls schwächere) Bedingung abgeleitet werden, daß für jedes Element eines Ringes R die aufsteigende Kette der Rechtsannulatoren seiner Potenzen abbricht. Diese Eigenschaft werde mit (H) bezeichnet. Die Seitenunabhängigkeit der starken Π -Regularität läßt sich aber in diesem allgemeineren Rahmen dauerlicherweise nicht aufrechterhalten, wie an folgendem Beispiel deutlich wird:

Sei K ein Körper und $K[[x]]$ der Potenzreihenring über K in der Variablen x . Dieser werde im Folgenden mit S bezeichnet. M sei die direkte Summe der $S/x^i S$, als (K, S) -Bimodul betrachtet. Dann hat der Ring

$$R := \begin{pmatrix} K & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

die Eigenschaft (E) und es gilt für alle $a \in R$: $r(a) = r(a^2)$, wie man leicht bestätigt. Andererseits gilt aber für alle i : der Durchschnitt des Linksannulators von x^i mit M (als Ideal von R aufgefaßt) ist ein echter direkter Summand im Durchschnitt des Linksannulators

von x^{i+1} mit M , so daß also für kein x^i sein Linksannulator auch nur groß im Linksannulator von x^{i+k} sein kann. Somit kann R auch als Beispiel für die Seitenabhängigkeit der Bedingungen (E) und (F) angesehen werden. Berücksichtigt man ferner, daß das linke singuläre Ideal von R gleich 0 , das rechte aber gleich M ist, so kann man R auch als Beispiel für die Seitenabhängigkeit der Bedingung (G) ausgewertet werden.

Die Relation der starken Π -Regularität zur Bedingung (H) kann folgendermaßen verdeutlicht werden:

BEMERKUNG. (a) Für einen Ring R sind äquivalent:

- (1) R ist stark Π -regulär.
- (2) Für alle $a \in R$ gibt es ein n : $a^n R + r(a^n) = R$.
- (3) Für alle $a \in R$ gibt es ein n : $a^n R \oplus r(a^n) = R$.

(b) Für einen Ring R sind äquivalent:

- (1) R erfüllt (H).
- (2) Für alle $a \in R$ gibt es ein n : $a^n R \cap r(a^n) = 0$.

4. STARK $\mathbb{T}$ -REGULÄRE RINGE UND IHRE EINHEITENGRUPPEN

Der Gedanke, stark $\mathbb{T}$ -reguläre Ringe mit Hilfe ihrer Einheitengruppen untersuchen zu können, wurde wohl bereits durch Folgerung 1.3 nahegelegt, wo unter anderem die Existenz von "vielen" Einheiten in stark $\mathbb{T}$ -regulären Ringen aufgezeigt worden ist. Dies soll im Weiteren präzisiert werden, wozu das nächste Resultat einen nicht unwesentlichen Beitrag liefert.

SATZ 4.1. Ist I ein Ideal des stark $\mathbb{T}$ -regulären Ringes R , so ist die Einheitengruppe von R/I ein epimorphes Bild der Einheitengruppe von R .

BEWEIS. Ist $f: R \longrightarrow R/I$ der kanonische Epimorphismus und a ein Element von R , für das $f(a)$ Einheit in R/I ist, so gilt wegen $f(\hat{a}) = \widehat{f(a)} : f(a\hat{a}) = 1$. Im Beweis von Folgerung 1.3 wurde gezeigt, daß $u := 1 + \hat{a} - a\hat{a}$ Einheit in R ist. Da nun $(f(a))^{-1} = \widehat{f(a)} = f(\hat{a}) = f(u)$ gilt, ist hiermit klar, daß die Einschränkung von f auf die Einheitengruppe von R den gesuchten Gruppenepimorphismus liefert.

Es sei hier daran erinnert, daß sich, wie im zweiten Abschnitt gezeigt wurde, selbst in regulären Ringen Einheiten i. a. nicht über stark $\mathbb{T}$ -reguläre Ideale liften lassen.

Für die Anwendung von Satz 4.1 ist eine technische Vorbereitung notwendig. Dabei soll hier wie im Folgenden $U(R)$ die Einheitengruppe des Ringes R bezeichnen.

LEMMA 4.2. Ist der rechtsprimitive, stark π -reguläre Ring R für keine natürliche Zahl $k \leq n$ ein k -reihiger Matrixring über einem Schiefkörper, so gibt es einen Unterring S von R und einen Gruppenepimorphismus von $U(S)$ auf die allgemeine lineare Gruppe $GL(n+1, K)$ eines Schiefkörpers K .

BEWEIS. Sei V_R einfach und treu und K der Endomorphismenring von V_R . Aus den Voraussetzungen folgt, daß ${}_K V$ mindestens $n+1$ -dimensional ist. Sei also U ein $n+1$ -dimensionaler Unterraum von V und sei S der Unterring derjenigen Elemente von R , die U in sich abbilden. Ist nun s ein Element von S , dessen Einschränkung auf U ein Automorphismus ist, so ist auch $\hat{s} \in S$, wie man den Gleichungen $s^i U = U$ und $\hat{s} s^{m+1} U = s^m U$ sofort entnimmt. Sei jetzt I das Annulatorideal von U in S . Nach dem Dichtesatz ist S/I isomorph zu K_{n+1} . Es genügt daher, nachzuweisen, daß der kanonische Gruppenhomomorphismus von $U(S)$ nach $U(S/I)$ surjektiv ist. Da nun aber bei dem kanonischen Ringepimorphismus von S auf S/I ein Element s genau dann auf eine Einheit abgebildet wird, wenn seine Einschränkung auf U ein Automorphismus ist, liegt nach obiger Darlegung in diesem Falle $\hat{s}$ in S . Nach Satz 1.2

folgt jetzt, daß das kanonische Bild von $\widehat{s}$ mit dem Einselement von S/I übereinstimmt. Wie im Beweis von Satz 4.1 sieht man nun, daß das kanonische Bild des Elementes $t := 1 + \widehat{s} - s\widehat{s}$, das Einheit in S (!) ist, gleich dem Inversen des kanonischen Bildes von s ist, und folgert hieraus die Behauptung.

Für die nächsten Resultate wird folgender Sachverhalt als bekannt vorausgesetzt (siehe etwa [2; chap. IV] und [12]): Die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ eines Körpers K ist genau dann auflösbar, wenn $n = 1$ und K kommutativ oder $n = 2$ und $K = GF_2$ oder $K = GF_3$ ist. Sie ist genau dann nilpotent, wenn $n = 1$ und K kommutativ ist. Insbesondere ist also die $GL(n, K)$ genau dann nilpotent, wenn sie abelsch ist. Ferner gilt nach [23], daß in einem Ring mit auflösbarer Einheitengruppe jeder Nilunterring nilpotent ist. Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich nun die Struktur stark Π -regulärer Ringe mit auflösbarer, nilpotenter oder abelscher Einheitengruppe recht genau bestimmen.

SATZ 4.3. Sei R ein stark Π -regulärer, radikalfreier Ring. Dann ist $U(R)$ genau dann auflösbar, wenn R zwei Ideale I und J besitzt mit: $I \cap J = 0$, $R/(I + J)$ kommutativ und (stark) regulär, I (bzw. J) ist als Ring ohne Einselement subdirektes Produkt von Kopien des zweireihigen Matrixrings über GF_2 (bzw. GF_3).

BEWEIS. Ist der Ring R stark Π -regulär und radikalfrei und ist $U(R)$ auflösbar, so ist R subdirektes Produkt (rechts-) primitiver Ringe, deren Einheitsgruppen nach Satz 4.1 ebenfalls auflösbar sind. Nach Lemma 4.2 und obigen Bemerkungen müssen diese primitiven Ringe kommutative Körper oder zu den zweireihigen Matrixringen über GF_2 oder GF_3 isomorph sein. Ist nun K das kleinste unter den Idealen von R mit reduziertem Faktorring, so ist R/K stark regulär und daher subdirektes Produkt von Schiefkörpern. Da diese kommutativ sein müssen, ist auch R/K kommutativ. Da jeder Homomorphismus von R in einen Körper über den kanonischen Epimorphismus auf R/K faktorisiert werden kann, ist K nur noch Untertring eines Produktes von zweireihigen Matrixringen über GF_2 oder GF_3 . Da diese Ringe keinen Homomorphismus auf einen reduzierten Ring $\neq 0$ zulassen, ist K sogar subdirektes Produkt solcher Ringe. Insbesondere ist K subdirektes Produkt zweier Ideale I und J , die ihrerseits subdirektes Produkt zweireihiger Matrixringe über GF_2 (im Fall von I) bzw. GF_3 (im Fall von J) sind. Da nun I Algebra über GF_2 , J aber über GF_3 ist, besitzen I und J kein gemeinsames homomorphes Bild $\neq 0$, so daß ihr subdirektes Produkt direkt sein muß. Daß umgekehrt die Einheitengruppe eines Ringes der beschriebenen Art auflösbar ist, ergibt sich (auch ohne die Voraussetzung " R stark Π -regulär") am einfachsten in folgender Weise:

$U(R)$ besitzt einen Homomorphismus in die (abelsche) Einheitengruppe von $R/(I + J)$, dessen Kern die "adjungierte" Gruppe von $I + J$ ist. Diese ist wiederum isomorph zu einer Untergruppe der Einheitengruppe eines direkten Produktes von Kopien der zweireihigen Matrixringe über GF_2 oder GF_3 . Letztere ist aber Produkt auflösbarer Gruppen von beschränkter "Auflösungslänge" und daher selbst auflösbar. Also muß auch $U(R)$ auflösbar sein, was zu zeigen war.

FOLGERUNG 4.4. Ist die Einheitengruppe des stark $\mathcal{T}$ -regulären Ringes R auflösbar, so ist $\text{Rad}(R)$ lokal nilpotent und $R/\text{Rad}(R)$ hat die in Satz 4.3 angegebene Gestalt.

BEMERKUNG. Definiert man die Auflösbarkeit einer Gruppe durch das Verschwinden einer (endlichen) Potenz des Kommutatorfunktors, so ergibt sich fast unmittelbar aus der Definition, daß sowohl das Radikal als auch jeder Nilunterring eines Ringes mit auflösbarer Einheitengruppe eine Polynomidentität erfüllen. Hieraus ergibt sich einerseits, daß jeder stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ring mit auflösbarer Einheitengruppe eine Polynomidentität erfüllt, andererseits liefert diese Bemerkung zusammen mit der bekannten Tatsache, daß Nilringe mit Polynomidentität lokal nilpotent sind, einen neuen Beweis des oben zitierten Resultates von Lanski.

Auch die folgenden Resultate können leicht aus Satz 4.3 - zusammen mit den darüber stehenden Bemerkungen und unter Verwendung der im Beweis benutzten Methoden - hergeleitet werden.

FOLGERUNG 4.5. Ist die Einheitengruppe des stark Π -regulären Ringes R nilpotent, so ist $R/\text{Rad}(R)$ kommutativ und $\text{Rad}(R)$ lokal nilpotent.

FOLGERUNG 4.6. Ist die Einheitengruppe des stark Π -regulären Ringes R abelsch, so sind $R/\text{Rad}(R)$ und $\text{Rad}(R)$ kommutativ.

Daß das letzte Resultat im allgemeinen nicht verbessert werden kann, zeigt der Ring der zweireihigen oberen Dreiecksmatrizen über GF_2 . In vielen Fällen aber impliziert eine abelsche Einheitengruppe bereits die Kommutativität des Ringes. Man entnimmt dies unmittelbar dem folgenden Ergebnis, das auch an sich von Interesse sein sollte.

SATZ 4.7. Ist die abelsche Gruppe R^+ des stark Π -regulären Ringes R 2-torsionsfrei, so ist jedes Element von R Summe von zwei Einheiten.

BEWEIS. Für jedes Element a von R gilt: $a = 2 a^2 \hat{a} + a (1 - a \hat{a}) + 1 - a \hat{a} - (a^2 \hat{a} + 1 - a \hat{a})$.

Nun ist $a^2 \hat{a} + 1 - a \hat{a}$ immer Einheit in R (das Inverse ist $\hat{a} + 1 - a \hat{a}$). Ist R 2-torsionsfrei, so ist 2 kein Nullteiler im stark Π -regulären Ring R und daher invertierbar. Dann ist aber auch $2 a^2 \hat{a}$ invertierbar in $a \hat{a} R a \hat{a}$. Da $a(1 - a \hat{a})$ nilpotent ist, ist auch $a(1 - a \hat{a}) + 1 - a \hat{a}$ invertierbar in $f R f$, wobei $f := 1 - a \hat{a}$ gesetzt ist. Hieraus folgt die Invertierbarkeit von $2 a^2 \hat{a} + a(1 - a \hat{a}) + 1 - a \hat{a}$ und somit die Behauptung.

Eine Halbgruppe heißt periodisch, wenn für jedes Element x zwei verschiedene natürliche Zahlen m und n existieren mit $x^m = x^n$. Ein Ring heißt periodisch, wenn seine multiplikative Halbgruppe periodisch ist. Man sieht sofort, daß ein Ring genau dann periodisch ist, wenn jeder von einem Element erzeugte Unterring endlich ist.

SATZ 4.8. Für einen Ring R sind äquivalent:

- (a) R ist periodisch.
- (b) R ist stark Π -regulär und seine Einheitengruppe ist periodisch.

BEWEIS. Klar ist, daß (a) (b) impliziert. Sei also R stark Π -regulär und $U(R)$ periodisch. Ist a ein Element von R , so gibt es nach Folgerung 1.3 eine Einheit u von R mit $a^{n+1} u = a^n$. Gilt nun $u^m = 1$, so folgt $a^{n+m} = a^{n+m} u^m = a^n$ und somit die Behauptung.

5. VOLLSTÄNDIG Π -REGULÄRE RINGE

Die Frage, ob die Eigenschaft eines Ringes, stark Π -regulär zu sein, Morita-invariant ist, d. h. ob stark Π -reguläre Ringe durch die Kategorie ihrer (Rechts-) Moduln charakterisiert werden können, ist sehr schwierig und muß in dieser Allgemeinheit leider unbeantwortet bleiben. Da für jedes Idempotent e des stark Π -regulären Ringes R der Ring $e R e$ offenbar wieder stark Π -regulär ist, reduziert sich die erwähnte Frage auf das Problem, ob für einen stark Π -regulären Ring R der Matrixring R_n (n beliebig) wieder stark Π -regulär ist.

DEFINITION. Ein Ring R heiße vollständig Π -regulär, wenn für jede natürliche Zahl n der Matrixring R_n stark Π -regulär ist.

Die oben gestellte Frage formuliert sich also nun folgendermaßen: Ist jeder stark Π -reguläre Ring vollständig Π -regulär? Ihre Schwierigkeit läßt sich bereits an verhältnismäßig einfachen Spezialfällen darlegen: Sei A eine Nilalgebra über dem Körper K . Durch "Adjunktion" des Körpers K gewinnt man einen (unitären) lokalen Ring R , dessen Radikal nil und der daher stark Π -regulär ist. Wäre R vollständig Π -regulär, so wäre das Radikal jedes Matrixrings über R nil. Dieses Radikal stimmt aber mit dem entsprechenden Matrixring

über A überein, der daher ebenfalls nil sein müßte. Die Frage, ob Matrixalgebren über nilen Algebren wieder nil sind, ist nun aber ebenfalls ein bisher unlöstes Problem in der Theorie der Ringe, das, wie Kropa [22] gezeigt hat, äquivalent zum berühmten und bis jetzt ebenfalls offenen "Köthe-Problem" (Kann ein Ring ohne nichttriviale zweiseitige Nilideale ein nichttriviales einseitiges Nilideal besitzen?) sowie zum Problem von Amitsur (Ist für einen Nilring R der Ring $R[x]$ wieder nil?) ist. Es soll nun gezeigt werden, wie das anfangs gestellte allgemeinere Problem auch als rein modultheoretisches Problem aufgefaßt werden kann.

SATZ 5.1. Für einen Ring R sind äquivalent:

- (a) Jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Rechtsmoduls ist surjektiv.
- (b) Jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Linksmoduls ist surjektiv.
- (c) R ist vollständig π -regulär.

BEWEIS. In Hinblick auf die in Satz 3.1 gezeigte Seitenunabhängigkeit des Begriffs "stark π -regulär" genügt es, die Äquivalenz von (a) und (c) nachzuweisen. Sei nun jeder injektive Endomorphismus eines endlich erzeugten R -Rechtsmoduls surjektiv und M ein zyklischer Rechtsmodul über dem Ring R_n . M kann in kanonischer Weise als endlich erzeugter R -Rechtsmodul aufgefaßt

werden, wobei jeder R_n -Endomorphismus von M zum R -Endomorphismus wird. Daher ist jeder injektive R_n -Endomorphismus von M surjektiv und R_n somit - nach Satz 3.6 - stark Π -regulär. Da n beliebig war, besagt dies gerade, daß R vollständig Π -regulär ist. Sei umgekehrt R vollständig Π -regulär und f ein injektiver Endomorphismus des n -erzeugten R -Rechtsmoduls M . Dann kann M^n als zyklischer R_n -Rechtsmodul aufgefaßt werden und f^n wird zu einem injektiven R_n -Endomorphismus von M^n . Da R_n nach Voraussetzung stark Π -regulär ist, muß f^n nach Satz 3.6 surjektiv sein. Dies ist aber äquivalent zur Surjektivität von f .

Um möglichst große Klassen von Ringen angeben zu können, in denen die vollständige Π -Regularität aus der starken folgt, sei zunächst ein auch an sich interessantes Resultat in Analogie zu Satz 1.7 angeführt.

Satz 5.2. Ein Ring R ist genau dann vollständig Π -regulär, wenn jeder prime Faktorring vollständig Π -regulär ist.

BEWEIS. Wegen Satz 1.7 ist R genau dann vollständig Π -regulär, wenn jeder prime Faktorring eines Matrixrings über R stark Π -regulär ist. Die Bemerkung, daß die primen Faktorringe der Matrixringe genau die Matrixringe über den primen Faktorringen sind, vollendet nun den Beweis.

SATZ 5.3. Ein stark $\mathcal{T}$ -regulärer Ring mit Polynomidentität ist vollständig $\mathcal{T}$ -regulär.

BEWEIS. Zunächst sei bemerkt, daß hier unter "Polynomidentität" alles verstanden werden kann, was im Satz von Posner als Voraussetzung genügt; insbesondere genügt es also, eine PI-Algebra im Sinne von Procesi [30] vorzusetzen. Wegen Satz 5.2 ist nämlich nur zu zeigen, daß ein primer stark $\mathcal{T}$ -regulärer Ring der zugrundegelegten (grundsätzlich gegen Faktorringe abgeschlossenen) Ringklasse vollständig $\mathcal{T}$ -regulär ist. Nach dem Satz von Posner sind aber diese Ringe Ordnungen in einfachen und halbeinfachen Ringen. Andererseits ist in einem stark $\mathcal{T}$ -regulären Ring jedes Element, das kein rechter und linker Nullteiler ist, beidseitig invertierbar, so daß stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe ihre eigenen klassischen Quotientenringe sind. Somit folgt, daß prime stark $\mathcal{T}$ -reguläre Ringe "mit Polynomidentität" einfach und halbeinfach sind, was (beispielsweise nach Satz 5.1) vollständige $\mathcal{T}$ -Regularität impliziert.

BEMERKUNG. Im Spezialfall eines kommutativen Ringes ist der Satz von Posner trivial (jeder nullteilerfreie kommutative Ring besitzt einen Quotientenkörper). Somit ergeben die Beweise der Sätze 1.7, 5.1, 5.2 und 5.3 einen elementaren Beweis für den bereits im Abschnitt 3 zitierten Satz von Vasconcelos ([35; Theorem]).

SATZ 5.4. Ist der vollständig Π -reguläre Ring R Unterring des Ringes S und ist S als R -Rechtsmodul endlich erzeugt, so ist auch S vollständig Π -regulär.

BEWEIS. Ist M ein endlich erzeugter S -Rechtsmodul, so wird wegen der Voraussetzung über S_R M auch mit der kanonischen R -Rechtsmodulstruktur zum endlich erzeugten Modul. Da hierbei die S -Endomorphismen zu R -Endomorphismen werden, ist wegen Satz 5.1 jeder injektive S -Endomorphismus von M surjektiv. Wiederum nach Satz 5.1 folgt nun die Behauptung.

Eine gewisse Ergänzung zu diesem Satz liefert der nächste, dessen Beweis auf den entsprechenden Beweis (vgl. die Darstellung in [19]) für algebraische Algebren zurückgeführt werden kann.

SATZ 5.5. Der Π -reguläre Ring R sei Algebra über dem kommutativen Ring K . Ferner sei m eine unendliche Kardinalzahl und die Mächtigkeit jedes Restklassenkörpers von K sei $\geq m$. Besitzt dann R (als Modul über K) ein Erzeugendensystem einer Mächtigkeit $< m$, so ist R vollständig Π -regulär.

BEWEIS. Da es nach Satz 5.2 genügt, die vollständige Π -Regularität für jeden primen Faktoring nachzuweisen, kann K als Körper (einer Mächtigkeit $\geq m$)

angenommen werden (das Zentrum eines primen π -regulären Ringes ist ein Körper!). Der Ring R wird dann zu einer K -Algebra, deren Dimension über K kleiner als m ist. Die π -Regularität von R gestattet es nun, für jedes $a \in R$ die Menge $M := \{a - k; k \in K\}$ als disjunkte Vereinigung von $M_1 := \{x \in M; x \text{ linker Nullteiler in } R\}$ und $M_2 := \{x \in M; x \text{ links invertierbar in } R\}$ darzustellen. Wählt man nun zu jedem $x_k := a - k$, $x_k \in M_1$, ein y_k mit $x_k y_k = 0 \neq y_k$, so sind diese y_k als Eigenvektoren der durch Linksmultiplikation mit a definierten linearen Transformation von R_K in sich wegen der paarweisen Verschiedenheit ihrer Eigenwerte linear unabhängig. Daher muß die Mächtigkeit von M_1 kleiner als m sein. Da folglich die Mächtigkeit von M_2 die Dimension von R_K übersteigt, gibt es eine endliche Familie verschiedener x_i aus M_2 sowie eine entsprechende Familie von $y_i \in R$ mit $y_i x_i = 1$, so daß diese y_i eine nicht-triviale Linearkombination mit Koeffizienten in K erfüllen. Wie in [19; p. 20] zeigt man nun durch Multiplikation von rechts mit dem Produkt der x_i , daß a algebraisch über K ist. Das Resultat folgt nun für überabzählbares m aus [19; Chapter X, § 14, Theorem 2]. Ist m abzählbar, so folgt Satz 5.5 unmittelbar aus Satz 5.4.

BEMERKUNG. Wie weiter aus diesem Beweis folgt, ist obiger Ring R im Sinne von Chacron ([9]) algebraisch und koalgebraisch über seinem Zentrum.

In Satz 5.1 wurde gezeigt, daß die vollständige π -Regularität des Ringes R gewisse Aussagen über die Endomorphismenringe endlich erzeugter R -Rechtsmoduln zuläßt. Beschränkt man die Betrachtung auf endlich präsentierbare Moduln, so erhält man eine stärkere Aussage. Als Vorbereitung hierfür dient ein Resultat, das auch selbständig Interesse beanspruchen dürfte.

SATZ 5.6. Ist I ein endlich erzeugtes Rechtsideal des vollständig π -regulären Ringes R , so ist der Idealisator S von I in R vollständig π -regulär.

BEWEIS. Zu einem beliebigen Element a von S gibt es ein a in R mit den in Satz 1.2 aufgeführten Eigenschaften. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß a stark regulär ist, so daß $a^2 \hat{a} = a$ gilt. Nun folgt sofort: $a I = a \hat{a} a I \subset a \hat{a} I$. Daher definiert die Linksmultiplikation mit a einen Endomorphismus $a_1: a \hat{a} I \rightarrow a I$ des endlich erzeugten R -Rechtsmoduls $a \hat{a} I$. Da, wie man leicht sieht, a_1 injektiv ist, folgt nach Satz 5.1 die Surjektivität von a_1 und somit die Gleichung $a I = a \hat{a} I$. Linksmultiplikation mit $\hat{a}$ liefert nun $\hat{a} I = a \hat{a} I$ und daher $a I = \hat{a} I$. Wegen $a I \subset I$ folgt hieraus die Behauptung.

SATZ 5.7. Ist M_R ein endlich präsentierbarer Rechtsmodul über dem vollständig π -regulären Ring R , so ist $\text{End}_R(M)$ vollständig π -regulär.

BEWEIS. Da der n -reihige Matrixring über $\text{End}_R(M)$ isomorph zum Endomorphismenring des endlich präsentierbaren Moduls M^n ist, genügt es, die starke $\mathcal{T}$ -Regularität von $\text{End}_R(M)$ zu zeigen. Da ferner der Endomorphismenring des n -erzeugten Moduls M_R stets isomorph zum Endomorphismenring des in kanonischer Weise als zyklischer R_n -Modul aufgefaßten Moduls M^n ist, genügt es, die Aussage für zyklisches M zu beweisen. Ist aber $M = R/I$, so ist $\text{End}_R(M)$ isomorph zu einem Faktorring des Idealisators des Rechtsideals I in R . Da nach Voraussetzung I_R endlich erzeugt ist, folgt die Behauptung aus Satz 5.6.

Die Aussagen von Satz 5.6 und Satz 5.7 bleiben gültig, wenn in ihnen "vollständig $\mathcal{T}$ -regulär" durch rechts perfekt, links perfekt oder semiprimär ersetzt wird. Im Fall von Satz 5.6 ergibt sich dies sofort aus der Tatsache, daß ein Zornscher (insbesondere also ein vollständig $\mathcal{T}$ -regulärer) Unterring eines rechts (links) perfekten bzw. semiprimären Ringes wieder rechts (links) perfekt bzw. semiprimär ist (siehe etwa [6 ; Proposition 3.5 und Korollar 3.6]). Der Beweis von Satz 5.7 hingegen bleibt wörtlich übertragbar (wobei der erste Satz weggelassen werden kann), wenn man bedenkt, daß die betrachteten Eigenschaften bei Übergang zu Matrixringen oder Faktorringen erhalten bleiben. Der Klarheit wegen sollen die so gewonnenen Aussagen noch einmal formell aufgeführt werden.

SATZ 5.8. Ist I ein endlich erzeugtes Rechtsideal des rechts bzw. links perfekten bzw. semiprimären Ringes R , so ist der Idealisator S von I in R rechts bzw. links perfekt bzw. semiprimär.

SATZ 5.9. Ist M_R ein endlich präsentierbarer Rechtsmodul über dem rechts bzw. links perfekten bzw. semiprimären Ring R , so ist $\text{End}_R(M)$ rechts bzw. links perfekt bzw. semiprimär.

Die Aussagen von Satz 5.9 liefern eine leichte Verallgemeinerung von Ergebnissen von Björk ([6; Theorem 4.1 und 4.2]). Allerdings erscheint der dort gegebene Beweis wesentlich komplizierter als derjenige, der hier in natürlicher Weise aus einem allgemeineren Zusammenhang entwickelt wurde. In [5] gibt Björk ein (vereinfachbares) Beispiel eines zyklischen Rechtsmoduls über einem linksartinschen Ring an, dessen Endomorphismenring nicht semiprimär und - wie man leicht verifiziert - nicht einmal stark π -regulär ist. Man erkennt auf diese Weise, daß in Satz 5.7 und 5.9 "endlich präsentierbar" nicht durch "endlich erzeugt" ersetzt und in Satz 5.6 und 5.8 "endlich erzeugt" nicht weggelassen werden kann. In derselben Arbeit gibt Björk auch ein Beispiel für einen zyklischen (und damit endlich präsentierbaren) Linksmodul über einem linksartinschen Ring, dessen Endomorphismenring nicht links oder rechts artinsch ist.

Zum Abschluß der Arbeit soll auf die Frage, wann Gruppenringe vollständig π -regulär sind, eingegangen werden.

SATZ 5.10. Ist der Ring R vollständig π -regulär und die Gruppe G lokal endlich, so ist der Gruppenring $R \left[G \right]$ vollständig π -regulär.

BEWEIS. Ist G zunächst endlich, so ist $R \left[G \right]$ als Rechtsmodul über R endlich erzeugt und daher nach Satz 5.4 vollständig π -regulär. Ist nun G lokal endlich, so ist G direkter Limes endlicher Gruppen. Damit ist aber auch $R \left[G \right]$ direkter Limes von Gruppenringen endlicher Gruppen und somit von vollständig π -regulären Ringen. Ein direkter Limes vollständig π -regulärer Ringe ist aber trivialerweise wieder vollständig π -regulär.

Die Frage nach der Umkehrbarkeit von Satz 5.¹⁰~~8~~ stößt auf ähnliche Schwierigkeiten wie die analoge Frage im Falle algebraischer Gruppenalgebren (vgl. etwa die Darstellung in [28]). Deshalb sollte es nicht verwundern, wenn auch hier nur Teillösungen geboten werden können.

LEMMA 5.11. Ist im Gruppenring $R \left[G \right]$ jedes Element rechts invertierbar oder rechter Nullteiler, so ist die Gruppe G periodisch. Ist zusätzlich R^+ torsionsfrei, so ist G sogar lokal endlich.

BEWEIS. Die erste Aussage dürfte in der Theorie der Gruppenringe wohlbekannt sein. Da es aber anscheinend nicht möglich ist, hierfür einen vollständigen und zusammenhängenden Beweis (oder auch nur das genaue Resultat selbst - vgl. Herstein [18; p. 36]) zu zitieren, sei ein solcher hier skizziert. Ist nämlich g ein beliebiges Element der Gruppe G , so kann $1 - g$ als Element des Augmentationsideals nicht rechts invertierbar sein. Daher gibt es ein $x \in R[G]$ mit $x(1 - g) = 0$. Hieraus folgt, daß g als Rechtsmultiplikator eine Permutation des "Trägers" von x , d. h. der Menge derjenigen Gruppenelemente, deren x -Koeffizient von Null verschieden ist, induziert. Da diese Menge endlich ist, folgt, daß auch g von endlicher Ordnung ist.

Ist zusätzlich R^+ torsionsfrei, so läßt sich R als $\mathbb{Q}$ -Algebra auffassen, da dann die kanonischen Bilder der von Null verschiedenen ganzen Zahlen in R und somit in $R[G]$ keine Nullteiler sein können, also in $R[G]$ und somit in R invertierbar sein müssen. Der von diesen Bildern und ihren Inversen erzeugte (notwendig zentrale) Unterring von R ist dann isomorph zu $\mathbb{Q}$. Die Behauptung folgt nun aus dem Beweis Formaneks ([14]) für den Satz, daß eine Gruppe, in deren Gruppenalgebra über einem (beliebigen) Körper F der Charakteristik 0 jedes Element rechts invertierbar oder linker Nullteiler ist, notwendig lokal endlich ist. Man braucht hierzu nur zu bemer-

ken, daß Formanek von F nur die $\mathbb{Q}$ -Algebren-Eigenschaft benutzt und daß die offenbar versehentlich so formulierte Voraussetzung "jedes Element ist entweder rechts invertierbar oder linker Nullteiler" durch die etwas schwächere Voraussetzung "jedes Element ist entweder rechts invertierbar oder rechter Nullteiler" ersetzt werden kann(allerdings wird in [29; Theorem 2.10] die Formulierung Formaneks unverändert beibehalten!).

SATZ 5.12. Ist der Gruppenring $R[G]$ π -regulär bzw. stark π -regulär bzw. vollständig π -regulär, so hat der Ring R dieselbe Eigenschaft und die Gruppe G ist periodisch. Ist zusätzlich $\text{Char } R = 0$, so ist G sogar lokal endlich.

BEWEIS. Daß R in den angegebenen Fällen dieselbe Eigenschaft wie $R[G]$ besitzt, ist trivial, da R isomorph zu einem Faktoring von $R[G]$ ist. Da ferner in jedem Fall die Voraussetzung des ersten Satzes von Lemma 5.8¹¹ erfüllt ist, ergibt sich hieraus bereits die Periodizität von G . Ist schließlich $\text{Char } R = 0$, so gilt, wenn T die Torsionsuntergruppe von R^+ bedeutet:
 $R[G]/T[G] \cong R/T[G]$ ist als additive Gruppe torsionsfrei, als Ring π -regulär bzw. stark π -regulär bzw. vollständig π -regulär. Mit dem oben erwähnten Argument ergibt sich nun auch die letzte Behauptung aus Lemma 5.8¹¹.

Neben dem Problem der Umkehrung von Satz 5.8' erhebt sich nun in natürlicher Weise auch die folgende Frage: Bleibt die Aussage von Satz 5.8' richtig, wenn man darin "vollständig Π -regulär" durch "stark Π -regulär" ersetzt? Stimmen die beiden Begriffe überein, so ist diese Frage selbstverständlich mit "ja" zu beantworten. Tatsächlich würde aber eine positive Antwort auch umgekehrt die Übereinstimmung der Begriffe nach sich ziehen. Den Schlüssel zu dieser Einsicht liefert folgendes vielleicht auch in anderem Zusammenhang verwendbare Resultat.

LEMMA 5.13. Ist im Ring R das Element 2 invertierbar oder nilpotent, so ist der Matrixring R_2 isomorph zu einem Faktorring eines Gruppenringes $R[G]$ mit einer endlichen Gruppe G .

BEWEIS. Sei zunächst 2 invertierbar in R . Die folgenden Matrizen A, B, C, D bilden zusammen mit $-A, -B, -C, -D$ eine Untergruppe G der $Gl(2, R)$:

$$\begin{aligned} A &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & B &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & D &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Betrachtet man schließlich ein beliebiges Element X

des Ringes R_2 ,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so bestätigt man: $X = 1/2 (d + a) A + 1/2 (d - a) C + 1/2 (c + b) B + 1/2 (c - b) D$. Folglich definiert die identische Abbildung auf G einen Epimorphismus des über R mit der 8-elementigen Gruppe G (die isomorph zur Diedergruppe D_8 ist) gebildeten Gruppenrings auf R_2 .

Sei nun $2^n = 0$. In diesem Fall kann die von den folgenden 6 Elementen gebildete Untergruppe G der $GL(2, R)$ als Untergruppe der $GL(2, \mathbb{Z}/2^n \mathbb{Z})$ aufgefaßt werden und ist daher endlich:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist nun wieder $X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ein beliebiges

Element von R_2 , so erhält man:

$$X = b A + c B + a C + d D - (b + c) E - (a + d) F.$$

Somit ist aber auch in diesem Fall R_2 ein epimorphes Bild von $R \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}$, womit Lemma 5.1¹³~~7~~ bewiesen ist.

SATZ 5.14. Ist im Ring R das Element 2 stark π -regulär, so ist jeder Matrixring R_n isomorph zu einem Ring $e S e$, wobei S ein Faktoring eines Gruppenringes $R \begin{bmatrix} G \end{bmatrix}$ mit endlicher Gruppe G und e ein Idempotent aus S ist.

BEWEIS. Zunächst folgt aus der Voraussetzung " 2 stark π -regulär", daß eine natürliche Zahl n existiert, so daß R direkte Summe der beiden zweiseitigen Ideale $S := 2^n R$ und $T := \text{Ann}(2^n)$ ist. Man sieht sofort, daß es genügt, die Behauptung für die beiden Ringe S und T zu beweisen. Nun gilt aber nach Voraussetzung $S = 2^n R = 2^{n+1} R$ und somit $2 S = S$, woraus wegen $S \cap \text{Ann}(2) = 0$ sofort folgt, daß 2 in S invertierbar ist. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 5.1³~~7~~ erhält man jetzt einen Epimorphismus von $R \begin{bmatrix} (D_8)^n \end{bmatrix}$ auf R_{2^n} . Da trivialerweise jeder Matrixring R_m isomorph zu einem Ring $e R_{2^n} e$ mit $e^2 = e \in R_{2^n}$ ist, ergibt dies bereits die Behauptung im Fall von S . In T gilt aber $2^n = 0$, weshalb in diesem Fall die Behauptung in völlig analoger Weise aus Lemma 5.1³~~7~~ hergeleitet werden kann. Somit ist schließlich Satz 5.1⁴~~7~~ vollständig bewiesen.

Das gesuchte Resultat ist nun eine einfache Folgerung.

FOLGERUNG 5.15. Ist für jede endliche Gruppe G der Gruppenring $R[G]$ stark $\mathcal{N}$ -regulär, so ist R (und damit jeder lokalendliche Gruppenring $R[G]$) vollständig $\mathcal{N}$ -regulär.

Literatur

- [1] Arens, R. F. und Kaplansky, I.: Topological representation of algebras. Trans. A. M. S. 63 (1948), 457-481.
- [2] Artin, E.: Geometric Algebra. New York, Interscience Publishers, 1957.
- [3] Azumaya, G.: Strongly $\mathcal{T}$ -regular rings. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. XIII (1954), 34-39.
- [4] Bass, H.: Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. Trans. A. M. S. 95 (1960), 466-488.
- [5] Björk, J. E.: Conditions which imply that subrings of artinian rings are artinian. J. reine angew. Math. 247 (1971), 123-138.
- [6] Björk, J. E.: Conditions which imply that subrings of semiprimary rings are semiprimary. J. Algebra 19 (1971), 384-395.
- [7] Bourbaki, N.: Algèbre. Chapitre 8. Hermann, Paris, 1958.
- [8] Brown, B. und McCoy, N. H.: The maximal regular ideal of a ring. Proc. A. M. S. 1 (1950), 165-171.
- [9] Chacron, M.: Algebraic algebras over $\mathcal{T}$ -regular rings. J. Algebra 24 (1973), 71-79.
- [10] Clark, W. E. und Bergman, G. M.: The automorphism class group of the category of rings. J. Algebra 24 (1973), 80-99.
- [11] Drazin, M. P.: Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. Amer. Math. Monthly 65 (1958), 506-514.

- [12] Eldridge, K. E.: On ring structures determined by groups. Proc. A. M. S. 23 (1969), 472-477.
- [13] Fisher, J. W. und Snider, R. L.: On the von Neumann regularity of rings with regular prime factor rings. Pacific J. Math. 54 (1974), 135-144.
- [14] Formanek, E.: A problem of Herstein on group rings. Canad. Math. Bull. 17 (1974), 201-202.
- [15] Forsythe, A. und McCoy, N. H.: On the commutativity of certain rings. Bull. A. M. S. 52 (1946), 523-526.
- [16] Fuchs, L. und Rangaswamy, K. M.: On generalized regular rings. Math Z. 107 (1968), 71-81.
- [17] Henriksen, M.: Two classes of rings generated by their units. J. Algebra 31 (1974), 182-193.
- [18] Herstein, I. N.: Notes from a Ring Theory Conference. A. M. S., Rhode Island, 1971.
- [19] Jacobson, N.: Structure of Rings. A. M. S. Colloquium publications XXXVII, Providence, R. I., 1964.
- [20] Kandô, T.: Strong regularity in arbitrary rings. Nagoya Math. J. 4 (1952), 51-53.
- [21] Kaplansky, I.: Topological representation of algebras II. Trans. A. M. S. 68 (1950), 62-75.
- [22] Krempa, J.: Logical connections between some open problems concerning nil rings. Fund. Math. LXXVI (1972), 121- 130.
- [23] Lanski, C.: Some remarks on rings with solvable groups of units. Ring Theory, Park City, U., 235-240.

- [24] McCoy, N. H.: Generalized regular rings. Bull. A. M. S. 45 (1939), 175-178.
- [25] Von Neumann, J.: On regular rings. Proc. Nat. Acad. Sci. 22 (1936), 707-713.
- [26] Nită, C.: Remarques sur les anneaux N-réguliers. C. R. Acad. Sci. Paris 271 (1970), 345-348.
- [27] Nită, C.: Anneaux N-réguliers de dimension finie. Revue Roum. Math. Pures Appl. XVIII (1973), 923-926.
- [28] Passman, D. S.: Infinite group rings. Marcel Dekker, New York, 1971.
- [29] Passman, D. S.: Advances in group rings. Israel J. Math. 19 (1974), 67-107.
- [30] Procesi, C.: Rings with polynomial identities. Marcel Dekker, New York 1971.
- [31] Shock, R. C.: A note on the prime radical. J. Math. Soc. Japan 24 (1972), 374-376.
- [32] Storrer, H. H.: Epimorphismen von kommutativen Ringen. Comment. Math. Helv. 43 (1968), 378-401.
- [33] Storrer, H. H.: Epimorphic extensions of non-commutative rings. Comment. Math. Helv. 48 (1973), 72-86.
- [34] Tominaga, H.: Some remarks on π -regular rings of bounded index. Math. J. Okayama Univ. 4 (1954), 135-141.
- [35] Vasconcelos, W. V.: Injective endomorphisms of finitely generated modules. Proc. A. M. S. 25 (1970), 900-901.

Lebenslauf:

Geburtsdatum: 14. 3. 1947

Geburtsort: Passau

Schulbildung: 1953-1957 Volksschule St. Nikola Passau

1957-1966 Gymnasium Leopoldinum Passau

1966 Abitur

Studium: 1966-1972 Studium der Mathematik an der
Universität München

Abschluß: 1972 Hauptdiplom in Mathematik

Beruf: Seit Juli 1976 Verwalter der Dienstgeschäf-
te eines wissenschaftlichen Assistenten am
Fachbereich für Mathematik und Physik der
Universität Bayreuth

